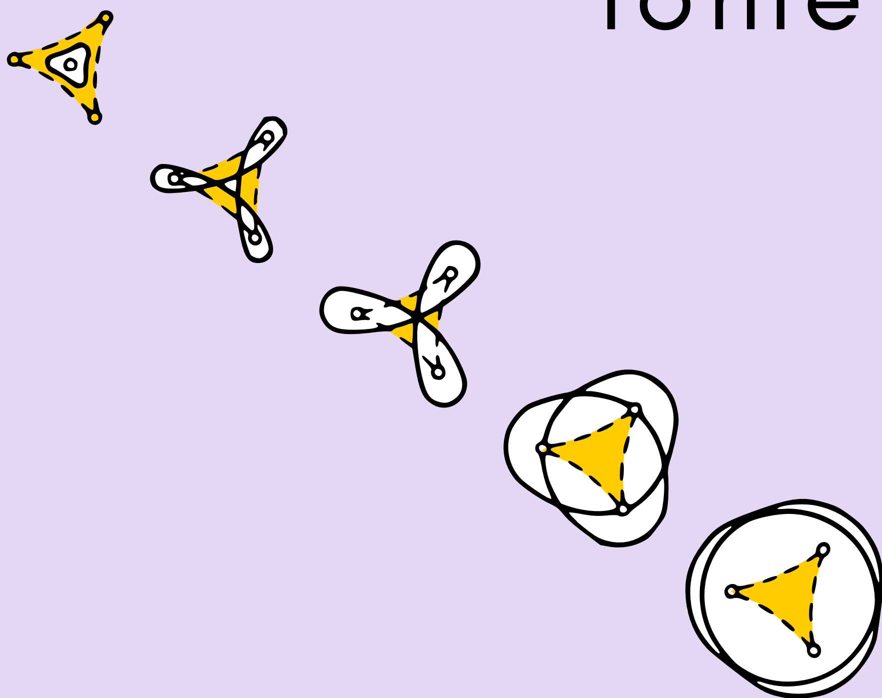
V. Arnold, A. Varchenko,
S. Goussein-Zade

SINGULARITÉS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

Tome 1



Éditions Mir Moscou

В. И. АРНОЛЬД, А. Н. ВАРЧЕНКО, С. М. ГУСЕЙН-ЗАДЕ

ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

в 2-х частях

Часть 1

Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов

Под редакцией В. И. Арнольда

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. ARNOLD, A. VARCHENKO, S. GOUSSEIN-ZADÉ

SINGULARITÉS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

(en deux parties)

1re partie

Classification des points critiques, des caustiques et des fronts d'onde

Sous la direction de V. ARNOLD



ÉDITIONS MIR MOSCOU

Traduit du russe
par V. KOTLIAR

На французском языке

AVANT-PROPOS

> ... Il n'y a rien de plus enthousiasmant, de plus grandiose, rien qui étourdisse l'esprit humain et s'en rende maître autant que les débuts dans une science. Après les cinq ou six premières leçons les espérances les plus lumineuses vous donnent déjà des ailes, vous vous voyez déjà le maître de la vérité. Moi aussi, je me suis donné aux sciences sans réserve, passionnément, comme à la femme aimée. J'étais leur esclave et ne voulais connaître nulle autre lumière que la leur. Jour et nuit, sans redresser l'échine, je bûchais, je me ruinais en livres, je pleurais quand, sous mes yeux, des gens exploitaient la science à des fins personnelles. Mais mon enthousiasme ne durait pas. C'est que chaque science a un début, mais absolument pas de terme, tout comme une fraction périodique. La zoologie a découvert trente-cinq mille espèces...
>
> *A. Tchékhov*
> En voyage *)

Le présent livre contient les rudiments de la « zoologie » des singularités des applications différentiables. Jeune branche de l'Analyse, cette théorie est une véritable plaque tournante des mathématiques contemporaines, à la croisée des chemins menant des domaines les plus abstraits des mathématiques (géométrie algébrique et différentielle, topologie, groupes et algèbres de Lie, variétés complexes, algèbre commutative...) à ceux qui débouchent sur des applications pratiques (équations différentielles, systèmes dynamiques, commande optimale, théorie des bifurcations, théorie des catastrophes, développements asymptotiques des ondes courtes et des intégrales de la méthode du point selle, optique géométrique et ondulatoire).

Les principales applications de la théorie des singularités consistent à mettre en évidence et à étudier de façon approfondie, dans chaque cas envisagé, un nombre restreint de singularités simples, les plus fréquentes, qui seules se présentent en situation générique, car toute singularité plus compliquée se décompose en singularités élémentaires par petite déformation de l'objet. Dans le but de faciliter, dans la mesure du possible, le passage des principes de base aux applications, nous donnons des listes assez exhaustives, des dessins et une clé d'identification des singularités pour toute une série d'objets (fonctions, applications, variétés, bifurcations, caustiques, fronts d'ondes...). Pour ce faire, nous avons tâché de présenter les principales idées et méthodes, les résultats de la théorie des singularités de façon à ce que le lecteur puisse, sans s'attarder sur les postulats justificateurs ou « théologiques » de la théorie, apprendre le plus rapidement possible à utiliser ces méthodes et résultats.

Nous avons particulièrement veillé à ne pas surcharger l'exposé de détails techniques. Les questions les plus simples et les plus importantes sont exposées dans le détail, tandis que les parties plus

---

*) Anton Tchékhov, *Nouvelles et récits*. Lausanne, éd. Rencontre, 1964, t. 3, p. 257-258. Trad. par Madeleine Durand et Edouard Parayre.

spéciales et plus complexes de la théorie ne sont abordées que sommairement.

Le lecteur n'est censé posséder que des connaissances mathématiques sommaires: calcul intégral et différentiel, notions d'algèbre linéaire et de géométrie *). L'exposé est conçu de façon à permettre au lecteur de « sauter » les passages compliqués sans porter préjudice à la compréhension de la suite de l'énoncé.

La théorie des singularités étant en pleine expansion (voir par exemple les listes des problèmes non résolus dans [21] et [29]), nous ne poursuivons pas le but d'embrasser toutes les tendances actuelles des recherches entreprises dans ce domaine, ni toutes leurs applications ; on trouvera une bibliographie — assez incomplète — , comptant près de 500 références, dans l'ouvrage de Poston et Stewart [247] et dans celui de Brieskorn [66].

Le présent ouvrage constitue un développement d'un cours professé à la faculté de Mécanique et de Mathématiques de l'Université Lomonossov de Moscou entre 1966 et 1983. Nous avons tiré un grand profit des notes de cours prises par V. Vasiliev, E. Landis et A. Khovanski. Le § 5 a été rédigé par A. Khovanski. Nous tenons à exprimer notre gratitude à ces collègues, ainsi qu'aux participants du séminaire sur la théorie des singularités, A. Kouchnirenko, E. Korkina et V. Matov, dont le concours nous a été précieux.

Le cas analytique complexe et les aspects de la théorie des singularités qui relèvent de la géométrie algébrique, à savoir monodromie, intersections, comportement asymptotique des intégrales, structures de Hodge mixtes ..., sont traités dans la deuxième partie de notre ouvrage intitulée *Singularités des applications différentiables. Monodromie et comportement asymptotique des intégrales*, dont la traduction française paraîtra aux Editions Mir en 1986.

Moscou. Iassénévo, octobre 1985 *Les auteurs*

*) Bref aperçu terminologique à l'usage du lecteur non mathématicien:

1) on appelle *variété* une généralisation n-dimensionnelle d'une courbe ou d'une surface, et *application*, celle d'une fonction; un *difféomorphisme* est une application biunivoque, ou bijection, différentiable de même que son inverse;

2) on appelle *transformation* d'un ensemble sa bijection sur lui-même; le *groupe des transformations* d'un ensemble est une famille de transformations qui contient à la fois la transformation et son inverse, ainsi que le produit de multiplication de toutes les transformations prises deux à deux; un *groupe* est le résultat de l'axiomatisation des propriétés des groupes de transformations;

3) une *algèbre* est le résultat de l'axiomatisation des propriétés de l'ensemble des fonctions sur une variété (on peut comme on le fait pour les fonctions, additionner les éléments d'une algèbre, et les multiplier entre eux et par des scalaires; ces opérations sont associatives, distributives et commutatives; toute algèbre contient un élément unité tel que $1f = f$);

4) un *module* sur une algèbre est le résultat de l'axiomatisation des propriétés de l'ensemble des champs de vecteurs sur une variété (on peut additionner les éléments du module entre eux et les multiplier par les éléments de l'algèbre);

5) un *idéal*, dans l'algèbre, est un sous-module de l'algèbre sur elle-même. Par exemple, les fonctions qui s'annulent sur une sous-variété donnée forment un idéal dans l'algèbre de toutes les fonctions sur la variété sous-jacente.

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS FONDAMENTALES

La théorie des singularités des applications différentiables est une ample généralisation de l'étude des maxima et minima des fonctions d'une variable. Les singularités envisagées n'impliquent donc pas l'existence d'une discontinuité ou d'un pôle mais l'annulation d'une dérivée ou d'un jacobien.

Dans ce chapitre nous introduirons des notions fondamentales de la théorie des singularités des applications différentiables, telles que points singuliers, leurs algèbres locales et autres invariants. Nous définirons certaines notions relatives à la stabilité et donnerons une première esquisse de classification des singularités.

§ 1. Quelques exemples élémentaires

Dans ce paragraphe nous donnons une classification des singularités des applications différentiables d'espaces de petite dimension proposée par H. Whitney.

1.1. Points critiques des fonctions. On dit qu'un point x est un *point critique* d'une fonction f si la dérivée de f en x est égale à 0.

Exemple. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction définie par $y = x^2$. Le point 0 est un point critique de f.

On distingue les points critiques génériques, ou non dégénérés, et les points critiques dégénérés.

Définition. Un point critique d'une fonction différentiable est appelé *non dégénéré* si la différentielle seconde de la fonction en ce point est une forme quadratique non dégénérée.

Exemple. Le point critique 0 de la fonction $y = x^2$ est non dégénéré, tandis que le point critique 0 de la fonction $y = x^3$ est dégénéré (fig. 1).

Soit une fonction différentiable arbitraire, voisine (ainsi que ses dérivées) de $y = x^2$. Il est clair qu'au voisinage de 0 cette fonction

a un point critique analogue à celui de la fonction $y = x^2$. Dans ce sens le point critique de $y = x^2$ est stable : il ne disparaît pas mais se déplace légèrement quand on fait « bouger » la fonction.

Il en est tout autrement du point critique dégénéré de $y = x^3$.

Exemple. Considérons une famille de fonctions d'une variable $y = x^3 + \varepsilon x$. Pour des ε petits, on peut assimiler chaque fonction de la famille à une petite déformation de la fonction $y = x^3$. On

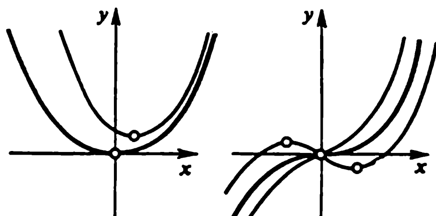


Fig. 1

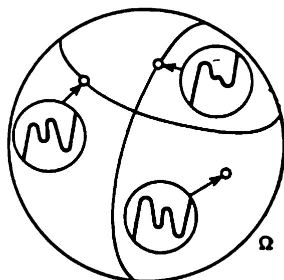


Fig. 2

remarque que, pour cette déformation, le point critique dégénéré $x = 0$ ou bien disparaît (si $\varepsilon > 0$), ou bien se sépare en deux points non dégénérés situés à une distance de l'ordre de $\sqrt{|\varepsilon|}$ du point dégénéré (si $\varepsilon < 0$).

Ainsi donc, le point critique de $y = x^2$ est stable et celui de $y = x^3$ est instable.

Quand il s'agit des fonctions d'une variable, l'analyse de la situation n'offre aucune difficulté. Considérons l'espace Ω de toutes les fonctions envisagées *).

Considérons dans cet espace l'ensemble des fonctions qui admettent des points critiques dégénérés ou qui prennent des valeurs égales dans des points critiques différents (fig. 2). (Dans le cas où la fonction est définie sur un segment, nous assimilerons le point extrémité à un point critique ; si la dérivée de la fonction ne s'annule pas en ce point critique, nous le considérerons comme non dégénéré.) Il est intuitif que de pareilles fonctions « dégénérées » forment un ensemble rare, à savoir une hypersurface, i.e. une surface de codimension un « définie par une seule équation », dans notre espace de fonctions (nous préciserons ces notions dans le texte qui suit et dé-

*) Ce peut être un espace de fonctions indéfiniment différentiables, ou un espace de fonctions suffisamment différentiables, ou un espace de fonctions analytiques, voire un espace de polynômes ; il est commode de rendre le domaine de définition des fonctions compact en considérant les fonctions sur un cercle ou sur un segment.

montrerons un théorème correspondant dans une situation plus générale). Cette hypersurface partage notre espace de fonctions en domaines tels que les fonctions contenues dans chaque domaine sont « organisées » de la même façon : leurs valeurs dans les points critiques successifs se suivent dans le même ordre.

Une fonction qui n'admet ni points critiques dégénérés ni valeurs critiques multiples est appelée *fonction de Morse*. Toute fonction de Morse « se conserve » par une petite déformation et se laisse ramener à la fonction initiale par des changements différentiables des variables indépendante et dépendante x, y. Dans ce sens toute fonction de Morse est stable. Ainsi donc, pour les applications à espaces source et but de dimension un, les applications stables forment un ouvert partout dense dans l'espace de toutes les applications. Plus est, les applications stables se laissent définir et classifier sous une forme suffisamment explicite, et les applications instables, bien qu'organisées d'une façon beaucoup plus compliquée (les points critiques d'une fonction différentiable peuvent former un fermé arbitraire), deviennent stables pour une petite déformation de la fonction : chaque singularité composée se sépare en plusieurs singularités non dégénérées et stables.

Le but recherché en théorie des singularités est atteint dans le cas particulier des applications sur une droite (théorie de Morse). Les résultats correspondants de la théorie de Morse s'énoncent comme suit :

Théorème. 1) *Les applications stables* $f\colon M^m \to \mathbf{R}^1$ *d'une variété fermée* *) M^m *sur la droite forment un ensemble partout dense dans l'espace des applications différentiables.*

2) *Pour qu'une application* f *soit stable il faut et il suffit que soient vérifiées les deux conditions suivantes :*

M_1. *L'application* f *est stable en tout point (autrement dit, tous les points critiques de la fonction* f *sont non dégénérés).*

M_2. *Toutes les valeurs critiques de la fonction* f *sont distinctes.*

3) *Une application* $f\colon M^m \to \mathbf{R}^1$ *est stable en un point* x_0 *si et seulement si l'on peut introduire dans les voisinages des points* $x_0 \in M^m$ *et* $y_0 = f(x_0) \in \mathbf{R}^1$ *des coordonnées* $x_1, \ldots, x_m$; y *en lesquelles l'application se laisse mettre sous l'une des* $m + 2$ *formes suivantes :*

MI. $y = x_1$.

MII_k. $y = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_m^2$, $k = 0, \ldots, m$.

Pour la démonstration, voir par exemple [218].

On se demande s'il en est de même dans le cas multidimensionnel, i.e. pour les applications $f\colon M^m \to N^n$ avec m et n quelconques.

*) Ici et dans le texte qui suit, on entend par variété fermée une variété compacte sans bord.

1.2. Points critiques et valeurs critiques des applications différentiables. Soit une application différentiable f: $M^m \to N^n$. Généralisons la notion de point critique. La dérivée de f en x est une application linéaire de l'espace T_x tangent à la variété source en x dans l'espace $T_{f(x)}$ tangent à la variété but en $f(x)$:

$$f_{*x}: T_x M^m \to T_{f(x)} N^n.$$

Exemple. Soit M^2 la surface d'une sphère dans l'espace tridimensionnel, N^2 un plan, f la projection de la sphère suivant la verticale sur le plan horizontal (fig. 3).

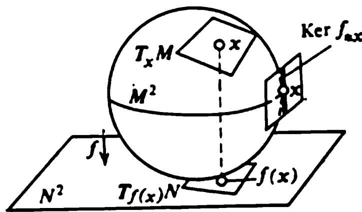


Fig. 3

L'application linéaire f_{*x} du plan T_xM tangent en un point x à la sphère, dans le plan $T_{f(x)} N$ tangent au plan horizontal, est non dégénérée si x n'appartient pas à l'équateur horizontal de la sphère ; dans le cas contraire le plan tangent en x à la sphère contient la droite verticale, et l'opérateur de projection f_{*x} a le noyau non trivial (sous-espace se réduisant à 0). Le noyau de f_{*x} dans les points de l'équateur est de dimension 1. Le rang de f_{*x} en ces points est 1.

Donnons une définition générale:

Définition. Un point x d'une variété M est dit *point critique* de l'application différentiable f: $M \to N$ si le rang de la dérivée

$$f_{*x}: T_x M \to T_{f(x)} N$$

en x est inférieur à sa valeur maximale possible, i.e. inférieur à la plus petite des dimensions de M et N:

$$\text{rang } f_{*x} < \min (\dim M, \dim N).$$

Remarque. Soient $x_1, \ldots, x_m$ (resp. $y_1, \ldots, y_n$) des coordonnées locales sur un voisinage du point $x \in M$ (resp. de $f(x) \in N$). L'application f se définit en ces coordonnées par n fonctions différentiables de m variables:

$$y_1 = f_1 (x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n = f_n (x_1, \ldots, x_m).$$

La matrice $(\partial f_i / \partial x_j)$ est la *matrice jacobienne* de l'application. En ces termes, *x est un point critique si le rang de la matrice jacobienne en x est non maximal.*

Exemple. Pour la projection de la sphère sur le plan horizontal, tout point de l'équateur horizontal est un point critique. En dehors de l'équateur le rang de f_{*x} est 2 ; aux points de l'équateur ce rang tombe à 1.

L'image d'un point critique s'appelle *valeur critique.*

Exemple. Les valeurs critiques d'une projection sphère sur plan forment un cercle qui correspond au contour apparent de la sphère.

1.3. Equivalence différentiable. La classification des applications différentiables peut être établie de différentes façons. La plus grossière est probablement la classification topologique : on dit que deux applications sont *topologiquement équivalentes* s'il existe des homéomorphismes (applications bijectives et bicontinues) des variétés source et but qui transforment une application dans l'autre. Les fonctions $y = x^2$ et $y = x^4$ sont topologiquement équivalentes.

Donc deux applications $f_p: M_p \to N_p$, $p = 1, 2$, sont topologiquement équivalentes, s'il existe des homéomorphismes $h: M_1 \to M_2$ et $k: N_1 \to N_2$ tels que $f_2 = kf_1h^{-1}$.

Autrement dit, l'équivalence topologique est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & N_1 \\ h\downarrow & & \downarrow k \\ M_2 & \xrightarrow{f_2} & N_2 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des homéomorphismes.

Pour les problèmes d'Analyse, l'équivalence topologique s'avère en général trop grossière. Par exemple, la fonction $y = x^4$ présentant une singularité dégénérée instable est topologiquement équivalente à une fonction stable. On se sert donc, en théorie des singularités, d'une notion plus fine d'équivalence différentiable.

Définition. L'*équivalence différentiable* des applications différentiables $f_1: M_1 \to N_1$, $f_2: M_2 \to N_2$ est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & N_1 \\ h\downarrow & & \downarrow k \\ M_2 & \xrightarrow{f_2} & N_2 \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des difféomorphismes (applications bijectives différentiables ainsi que leurs inverses *)).

Remarque 1. Dans le langage des coordonnées locales, l'application $y = f(x)$ est une suite finie de fonctions ; le difféomorphisme

*) Ici et dans le texte qui suit, à moins d'indication contraire, ***différentiable*** (ou *lisse*) signifie « continûment différentiable de classe nécessaire », par **exemple** indéfiniment différentiable.

h, un changement des variables indépendantes x ; le difféomorphisme k, un changement des variables dépendantes y. De ce point de vue, deux applications sont différentiablement équivalentes pour autant que l'on puisse passer de l'une à l'autre par des changements différentiables des variables indépendantes et dépendantes.

Remarque 2. Le diagramme commutatif ci-dessus n'est autre que l'identité

$$k\,(f_1\,(h^{-1}\,(x))) \equiv f_2\,(x).$$

Dans cette formule h^{-1} est *à droite* de f_1 et k, *à gauche* de f_1. C'est la raison pour laquelle on appelle les difféomorphismes h^{-1} de l'espace source (et les changements des variables indépendantes x) *changements à droite*, ou *R-changements*. Dans le même ordre d'idées, les difféomorphismes k des espaces buts (et les changements des variables dépendantes y) sont appelés *changements à gauche*, ou *L-changements*.

Remarque 3. Une autre façon d'exprimer l'équivalence différentiable consiste en ce qui suit. Soient $\Omega(M, N)$ l'ensemble des applications différentiables de M dans N, Diff M, Diff N les groupes des difféomorphismes de la variété source M sur elle-même et de la variété but N sur elle-même respectivement.

Le produit direct des groupes

$$\text{Diff } M \times \text{Diff } N$$

se compose de tous les couples (h, k) de difféomorphismes des espaces source $(h: M \to M)$ et but $(k: N \to N)$.

Le groupe Diff $M \times$ Diff N agit sur $\Omega(M, N)$ comme suit: si $f \in \Omega\,(M, N)$, $h \in$ Diff M et $k \in$ Diff N, alors $(h, k)\,f = k \circ f \circ h^{-1}$.

On voit sans peine que c'est bien une action, i.e. que

$$(h_1h_2,\ k_1k_2)\,f = (h_1,\ k_1)\,((h_2,\ k_2)\,f).$$

C'est une action *à gauche et à droite* *), ou *RL-action* (Diff M est une action *à droite* et Diff N une action *à gauche*).

En ces termes, la définition de l'équivalence différentiable s'énonce ainsi: *deux applications de M dans N sont différentiablement équivalentes si et seulement si elles appartiennent à une même orbite de RL-action* (fig. 4).

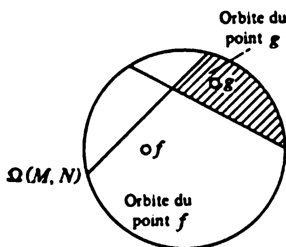


Fig. 4

Exemple. Les composantes connexes de l'ensemble de toutes les fonctions de Morse (définies au n° 1.1) sont des orbites d'une *RL*-action des composantes connexes de Diff $M \times$ Diff N.

*) Ne pas confondre avec l'action à gauche au sens algébrique.

1.4. Stabilité. Soit une application différentiable $f: M \to N$ d'une variété fermée M dans une variété N.

Définition. On dit que l'application f est *différentiablement stable* (ou, d'une façon plus détaillée, *différentiablement stable à gauche et à droite*, en abrégé *RL-différentiablement stable*, ou enfin *stable* tout court) si toute application suffisamment proche *) de f lui est différentiablement équivalente.

Autrement dit, f est stable si sa RL-orbite est ouverte.

Exemple. La projection sphère sur plan est stable. L'application du cercle $\{x \bmod 2\pi\}$ dans la droite $\{y\}$ définie par $y = \sin 2x$ est instable.

Remarque. Quitte à remplacer « différentiable » par « topologique » dans la définition précédente, on obtient la définition de la *stabilité topologique.*

Exemple. La projection sphère sur plan est topologiquement stable, comme toute application différentiablement stable. Il existe pourtant des applications stables topologiquement mais non différentiablement, mais exhiber un exemple n'est pas chose facile (voir [207]). La formule $y = \sin 2x$ définit une application topologiquement instable d'un cercle dans une droite.

Les notions introduites admettent aussi des variantes locales. Par exemple, la singularité en 0 de la fonction $y = x^2$ est stable et la singularité en 0 de la fonction $y = x^3$ est instable. Pour donner une définition formelle de stabilité d'une application en un point, introduisons quelques termes.

Définition. On appelle *germe d'application $M \to N$ au point x de M* la classe d'équivalence des applications $\varphi: U \to N$ (dont chacune est définie dans un voisinage (particulier) U de $x \in M$) ; deux applications sont considérées comme équivalentes si elles se confondent dans un voisinage de x (ce dernier voisinage peut être plus petit que l'intersection des voisinages où les deux applications sont définies). Si deux applications appartiennent à une même classe, on dit aussi qu'elles ont un *germe commun en x* (fig. 5).

Autrement dit, le germe d'une application f en un point x est ce qui en reste quand on « réduit indéfiniment son domaine de définition ».

Définition. On dit que deux germes d'applications différentiables sont *RL-équivalents*, ou *différentiablement équivalents*, ou *équivalents* tout court s'il existe des germes de difféomorphismes de la source et du but qui font passer du premier germe au second (si

*) Suffisamment peu différente de f, à condition de prendre en compte un nombre suffisamment grand de dérivées.

le germe de f_1 en x_1 est équivalent à celui de f_2 en x_2, il existe un germe en x_1 d'un difféomorphisme h de x_1 à x_2 et un germe en f_1 (x_1)

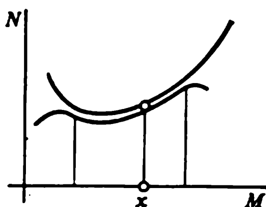


Fig. 5

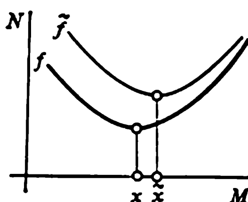


Fig. 6

d'un difféomorphisme k de f_1 (x_1) à f_2 (x_2), tels que k $(f_1$ $(h^{-1}(x))) \equiv$ $\equiv f_2$ (x) dans un voisinage suffisamment petit de x_2). La classe d'équivalence d'un germe en un point critique s'appelle *singularité.*

Définition. Un germe d'application différentiable f: $M \to N$ en un point x de M (fig. 6) est dit *RL-stable*, *différentiablement stable*, ou *stable* tout court si, pour un voisinage aussi petit que l'on veut U de x, il existe un voisinage E de l'application *) f dans Ω (M, N) tel que pour toute application $\tilde{f}$ de E dans U il existe un point $\tilde{x}$ tel que le germe de $\tilde{f}$ en $\tilde{x}$ soit équivalent au germe de f en x.

Il est facile de s'assurer que la stabilité en un point caractérise le germe et non l'application : cette propriété est conservée par toute variation de f où au moins un voisinage de x reste intact.

On définit de même l'*équivalence topologique des germes* et la *stabilité topologique des germes.*

Exemple. Les germes d'applications $y = x^2$ et $y = x^4$ de la droite réelle en 0 sont topologiquement équivalents. Le germe de $y = x^2$ en 0 est topologiquement (et même différentiablement) stable. Le germe de $y = x^4$ en 0 est différentiablement (et même topologiquement) instable.

1.5. Applications stables de variétés de dimension 2 sur des variétés de dimension 2. Commençons par un exemple déjà examiné : la projection sphère sur plan (fig. 3). Les singularités de la projection sont les points de l'équateur. Il est intuitif que tout germe d'application en un point quelconque de l'équateur est stable.

---

*) Le voisinage d'une application donnée f est l'ensemble de toutes les applications peu différentes de f, à condition de prendre en compte leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Dans le cas local envisagé, on peut admettre que $M \subset \mathbf{R}^m$ et $N \subset \mathbf{R}^n$ sont des parties d'espaces euclidiens et que E se définit par les inégalités $\| \tilde{f} - f \|_k < \varepsilon$, où $\| g \|_k = \sup_{|\alpha| \leqslant k} | \partial^\alpha g / \partial x^\alpha |$.

On imagine difficilement d'autres singularités stables d'applications de variétés de dimension 2 sur des variétés de dimension 2. En effet, les images visuelles de solides à surface lisse à trois dimensions sont leurs contours apparents composés des valeurs critiques de l'application de projection de la surface sur la rétine de l'œil. Nous avons généralement l'impression que ces contours apparents sont des courbes lisses. Or, il suffit de regarder avec un peu plus d'attention autour de soi (par exemple d'examiner les visages des voisins) pour découvrir qu'il existe, en plus des singularités du type de la projection de points équatoriaux, encore un type de singularité. Il a été découvert par H. Whitney qui, dans un travail datant de 1955 [334], a donné une description exhaustive des singularités d'applications génériques de variétés de dimension 2 sur des variétés de dimension 2. Le travail de Whitney étant fondamental en théorie des singularités, l'année 1955 est considérée donc comme date de fondation de la théorie.

Whitney a établi que *toute application différentiable d'une variété bidimensionnelle compacte dans une variété bidimensionnelle se laisse approcher d'aussi près que l'on veut (avec des dérivées d'ordre aussi élevé que l'on veut) par une application stable.*

En plus, il a étudié la structure des applications stables. Une application stable admet en tout point un germe stable. Whitney a décrit tous les germes stables d'applications de variétés de dimension 2 : il y en a exactement trois, à l'équivalence différentiable près. Il a montré enfin qu'une application d'une variété compacte de dimension 2 sur une variété de dimension 2 est stable si son germe en tout point est stable et les valeurs critiques sont « génériques ou en position générale » (ceci est une généralisation de la condition de non-coïncidence des valeurs critiques en des points critiques différents pour les fonctions de Morse, voir n° 1.1).

Théorème de Whitney. *Une application d'une variété bidimensionnelle dans une variété bidimensionnelle est stable en un point si et seulement s'il existe des coordonnées locales (x_1, x_2) sur la source et (y_1, y_2) sur le but, telles que l'application peut s'écrire sous l'une des trois formes suivantes:*

WI $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ (*point régulier*),
WII $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2$ (*pli*),
WIII $y_1 = x_1^3 + x_1x_2$, $y_2 = x_2$ (*fronce*)

(*le point en question ayant comme coordonnées* $x_1 = x_2 = 0$).

Autrement dit, tout germe stable d'application d'une variété bidimensionnelle sur une variété bidimensionnelle est différentiablement équivalent à l'un des trois germes d'applications en 0 énumérés.

Le premier est un germe de difféomorphisme. Toute application différentiable de variétés de dimension 2 au voisinage d'un point non critique se laisse réduire à cette forme.

La singularité du deuxième type s'appelle le *pli*. Cette application plan sur plan peut être assimilée à une famille d'applications droite sur droite ($y_1 = x_1^2$) qui dépendent (trivialement) d'un paramètre ($y_2 = x_2$).

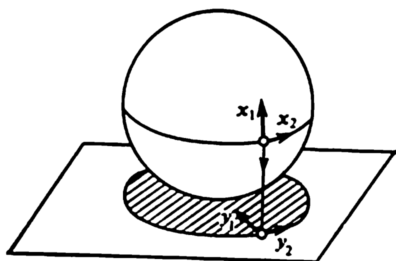


Fig. 7

Exemple. La projection sphère sur plan horizontal admet, à l'équateur horizontal, une singularité du type pli : on le voit facilement en choisissant des coordonnées locales convenables (x_2 et y_2 comme longitude, x_1 comme latitude, fig. 7).

1.6. Fronce de Whitney. On appelle *fronce de Whitney* la troisième singularité stable de la liste ci-dessus, i.e. la singularité en 0 de l'application

$$y_1 = x_1^3 + x_1x_2, \quad y_2 = x_2.$$

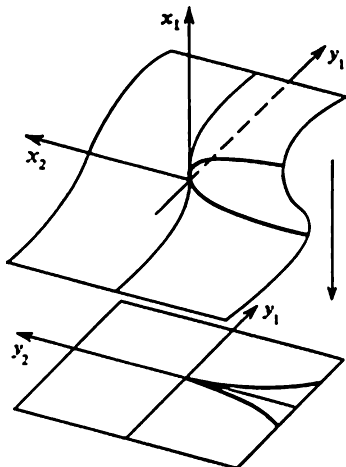


Fig. 8

Visualisons-la comme singularité de la projection verticale d'une surface lisse d'un espace tridimensionnel sur un plan horizontal.

A cet effet, considérons la surface graphe de la fonction $y_1 = x_1^3 + x_1x_2$ dans l'espace tridimensionnel muni de coordonnées (x_1, x_2, y_1) (fig. 8). Elle est difféomorphe au plan (tout graphe d'application différentiable est difféomorphe à son domaine de définition): on peut prendre x_1, x_2 pour coordonnées sur la surface. Soit l'intersection de la surface avec le plan vertical $x_2 =$ Cte. Pour x_2 fixé, l'équation $y_1 = x_1^3 + x_1x_2$ définit une parabole cubique contenue dans le plan vertical. On voit trois telles paraboles sur la figure 8.

Si $x_2 > 0$, alors y_1 croît monotonément en fonction de x_1 le long de la courbe cubique correspondante. Par contre, si $x_2 < 0$, alors y_1 admet deux points critiques : un maximum local et un minimum local.

Projetons notre surface sur le plan horizontal :

$$(x_1, x_2, y_1) \mapsto (x_2, y_1).$$

Nous obtenons une application différentiable surface sur plan qui présente à l'origine une singularité de type fronce. En effet, introduisons les coordonnées (x_1, x_2) sur la surface et $(y_1, y_2 = x_2)$ sur le plan horizontal. En ces coordonnées l'application de projection se définit exactement par les formules de la fronce de Whitney. Le théorème de Whitney dit que cette singularité est stable. En particulier, quand on fait bouger la surface dans l'espace à trois dimensions, on obtient une surface dont la projection sur le plan horizontal admet une singularité analogue dans un point proche de l'origine.

Problème. Chercher les points critiques de l'application de Whitney

$$y_1 = x_1^3 + x_1 x_2, \qquad y_2 = x_2.$$

S o l u t i o n. La matrice jacobienne s'écrit

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans les points critiques le rang de cette matrice est inférieur à 2, i.e. son déterminant est nul, $3x_1^2 + x_2 = 0$. Par conséquent, l'ensemble des points critiques est une courbe lisse. Sur le plan muni de coordonnées (x_1, x_2), l'équation $3x_1^2 + x_2 = 0$ définit une parabole (fig. 9).

Les points critiques de projection de la surface $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2$ (fig. 8) sont les points en lesquels la tangente à la surface contient une droite verticale. Il est clair que tels sont tous les points critiques de la fonction y_1 sur les paraboles cubiques de la fig. 8. Nous en déduisons que ces points forment une courbe lisse (ce qui n'était nullement évident sans le calcul).

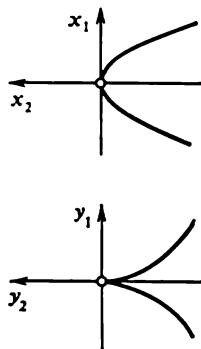


Fig. 9

Problème. Chercher les valeurs critiques de l'application de Whitney.

S o l u t i o n. Ce sont celles qui correspondent aux points critiques $x_2 = -3x_1^2$. Substituant à x_2 son expression en fonction de x_1, on obtient l'équation paramétrique le l'ensemble des valeurs critiques:

$$y_1 = x_1^3 + x_1 x_2 = -2x_1^3, \quad y_2 = x_2 = -3x_1^2.$$

Ainsi donc, l'ensemble des valeurs critiques est une parabole semi-cubique sur le plan (y_1, y_2). Cette courbe admet un point singulier à l'origine: un point de rebroussement, ou cusp. Elle divise le plan en deux domaines. Tout point appartenant au plus petit domaine admet trois images réciproques par l'application de Whitney, et tout point du plus grand domaine, une seule image réciproque.

Remarque. Si l'on regarde la surface de haut en bas, on ne voit que le pli supérieur qui se termine au point fronce: l'image du pli a

donc l'aspect d'une moitié de parabole semi-cubique. La plupart des surfaces qui nous entourent ne sont pas transparentes : nous voyons donc que le pli se termine au point fronce mais nous ne remarquons pas le cusp.

Exemple. Regardons la surface d'un tore dans l'espace à trois dimensions (fig. 10) : nous distinguons nettement deux points fronces. Si le tore était transparent, nous pourrions voir quatre points fronces, comme sur la figure 11. Les tores transparents étant rares

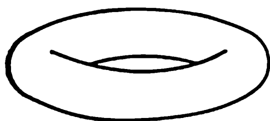


Fig. 10

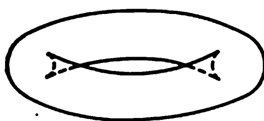


Fig. 11

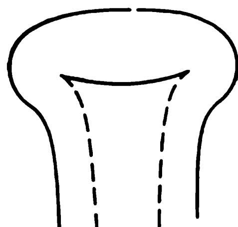


Fig. 12

dans la vie quotidienne, examinons la surface lisse d'une bouteille de verre : nous remarquons sans peine deux points fronces sur le goulot (fig. 12) et nous nous assurons vite qu'ils sont stables en faisant bouger la bouteille.

1.7. Les catastrophes. D'après le théorème de Whitney, les plis et les fronces sont conservés par de petites déformations, alors que toute singularité de structure plus complexe se décompose en plis et fronces sous une petite déformation : de ce fait, les applications différentiables génériques de variétés bidimensionnelles ne présentent jamais de singularités composées. Les applications différentiables sont partout ; donc, en vertu du théorème de Whitney, il est normal que l'on rencontre à tout bout de champ des contours de plis et des cusps de paraboles semi-cubiques sur ces contours.

Ce théorème remarquable a fait naître toute une foule de spéculations, liées pour la plupart aux noms de R. Thom et de E. C. Zeeman. Ils ont introduit le terme de *théorie des catastrophes*, sous lequel ils entendent tout le domaine d'applications du théorème de Whitney. Des centaines de travaux, en général de caractère appliqué, sont consacrés à la théorie des catastrophes. Le schéma de raisonnement des auteurs est à peu près le même. On considère une surface lisse dans l'espace tridimensionnel (le plus souvent sans aucune information sur cette surface), ainsi que sa projection sur un plan. Puisqu'on ignore tout de la surface, on la suppose générique. Une telle surface ne peut avoir d'autres singularités de projection que des plis et des fronces. Cela est déjà suffisant pour se faire une idée des sauts, ou « catastrophes », qui peuvent se produire sur les objets considérés.

Nous allons donner un exemple d'« application pratique » de ce type, tiré plus ou moins des travaux de Zeeman.

Proposons-nous de caractériser un esprit créateur, par exemple un chercheur, par trois paramètres : « techniques » (maîtrise) T, « enthousiasme » (motivation) E, « résultats » R. Il doit exister entre ces paramètres une certaine relation : on a donc une surface dans l'espace tridimensionnel muni de coordonnées (T, E, R). Projetons cette surface sur le plan (T, E). La surface étant générique, l'application de projection ne peut avoir d'autres singularités que des plis ou des fronces. On prétend que la fronce représentée sur la figure 13 traduit de façon suffisamment fidèle les phénomènes observés.

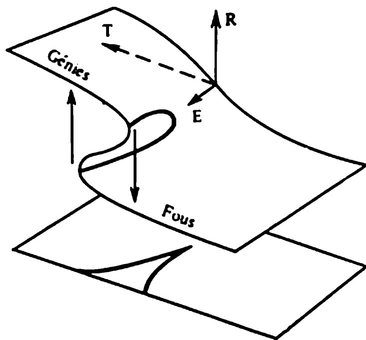


Fig. 13

En effet, voyons dans quelle mesure les résultats obtenus dépendent de la maîtrise et de l'enthousiasme du chercheur. S'il est peu passionné pour ses recherches (E petit), les résultats croissent monotonément et lentement en fonction des techniques employées (T). Si l'enthousiasme est grand, le caractère de l'évolution change : les résultats peuvent croître brusquement, par bond. On est alors dans le domaine des résultats remarquables (domaine « génies » sur notre surface).

D'autre part, si l'enthousiasme augmente mais la maîtrise reste médiocre, on se trouve dans le domaine « fous ». Il est remarquable que les « catastrophes » — les passages brusques entre les domaines « génies » et « fous » — ont lieu sur des lignes différentes et à condition d'avoir beaucoup d'enthousiasme et à maîtrise égale, le génie et le fou peuvent ne différer que par les résultats obtenus.

Les défauts manifestes du modèle décrit nous dispensent d'entrer dans les détails (voir par exemple [247]).

La théorie des singularités a bien des applications sérieuses : en théorie de l'élasticité, en optique (singularités des caustiques et des fronts d'onde), en théorie des intégrales oscillantes (méthode de la phase stationnaire), etc. Nous reviendrons sur ces applications après avoir développé des techniques adéquates.

1.8. Champ des noyaux de la dérivée pour le pli et la fronce. Décomposition des singularités plus complexes. Revenons à la fronce de Whitney (fig. 9) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$:

$$y_1 = x_1^3 + x_1 x_2, \quad y_2 = x_2.$$

Problème. Chercher le noyau de la dérivée f_{*x} de l'application f au point x.

Solution. La matrice jacobienne

$$(f_{*x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 en tout point sauf aux points critiques. Le lieu des points critiques est une parabole $3x_1^2 + x_2 = 0$; en ces points le rang de la matrice jacobienne est 1. Par conséquent, le noyau de la dérivée est de dimension 1 dans tous ces points (aux points plis comme au point fronce).

On voit donc naître, sur la parabole des points critiques, un champ de droites : c'est le champ des noyaux de la dérivée.

En examinant la matrice jacobienne, on remarque que le noyau de la dérivée est parallèle en tout point à l'axe des x_1 (fig. 14).

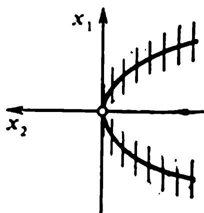


Fig. 14

Remarque. De la solution du problème on voit que le noyau de la dérivée n'est tangent à la courbe des points singuliers qu'au point fronce. Cette particularité permet souvent de rechercher bien vite les points fronces des applications génériques de variétés de dimension 2. En vertu du théorème de Whitney, pour une telle application

1) l'ensemble des points critiques est une courbe lisse,

2) le noyau de la dérivée en tout point de la courbe est de dimension un,

3) le noyau de la dérivée est transversal à la courbe en ses points génériques mais lui est tangent en quelques points particuliers. Ces derniers sont précisément les points fronces.

Exemple. Considérons l'application du plan d'une variable complexe $z = x_1 + ix_2$ sur le plan d'une autre variable complexe $w = y_1 + iy_2$, définie par $w = z^2$, comme une application différentiable d'un plan réel de dimension 2 sur un plan réel de dimension 2 :

$$y_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad y_2 = 2x_1x_2.$$

La dérivée est de rang 2 partout sauf en $z = 0$, où elle s'annule et a donc le noyau de dimension 2.

Nous en tirons la conclusion que l'application envisagée admet à l'origine une singularité différente d'un pli ou d'une fronce. Par conséquent, d'après le théorème de Whitney, il s'agit d'une application instable : quand on la fait bouger, sa singularité en 0 doit se décomposer en plis et fronces.

Dans la classe des germes d'applications holomorphes $\mathbf{C}^1 \to \mathbf{C}^1$ la singularité $w = z^2$ est stable. Pour retrouver la situation générale dans la classe des applications réelles, il est indispensable d'intro-

duire une perturbation telle que les applications cessent d'être holomorphes. Le plus simple est de prendre comme application perturbée

$$w = z^2 + \varepsilon\bar{z}.$$

Pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, elle reste proche de l'application initiale en tout cercle fixé.

Puisqu'on peut faire varier ε en multipliant z et w par un nombre, il suffit d'examiner l'application en prenant un ε non nul sans demander qu'il soit petit.

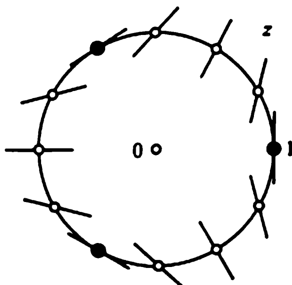


Fig. 15

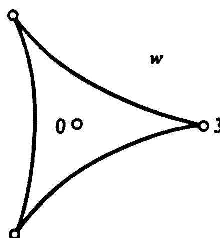


Fig. 16

Soit $\varepsilon = 2$. Etudions les singularités de l'application du plan réel $\{z\}$ sur le plan $\{w\}$ définie par la formule

$$w = z^2 + 2\bar{z}.$$

Problème. Chercher l'ensemble des points critiques de l'application.

S o l u t i o n. La dérivée de l'application prend sur un vecteur ξ la valeur $dw(\xi) = 2z\xi + 2\bar{\xi}$. La dérivée est dégénérée si l'équation $2z\xi + 2\bar{\xi} = 0$ admet une solution ξ non nulle. On a $z = -\bar{\xi}/\xi$, d'où $|z| = 1$. Ainsi donc, le lieu des points critiques est un cercle de rayon 1.

Problème. Chercher le champ des noyaux de la dérivée de l'application sur le cercle des points critiques.

S o l u t i o n. De la formule $z = -\bar{\xi}/\xi$ ci-dessus on voit que le noyau de la dérivée tourne de l'angle π dans le sens négatif pendant que z parcourt une fois le cercle des points critiques dans le sens positif. De plus, le noyau est tangent au cercle en $z = 1$. Le champ des noyaux est donc de la forme montrée sur la figure 15; il est tangent au cercle des points critiques en trois points.

Problème. Chercher le lieu des valeurs critiques de l'application.

S o l u t i o n. Soit $z = e^{i\varphi}$ un point critique. La valeur critique associée à ce point est $w = 2e^{-i\varphi} + e^{2i\varphi}$. C'est l'équation paramétrique d'une hypocycloïde à trois rebroussements (fig. 16). En effet, considérons un petit cercle de rayon 1, ou *roulante*, qui roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle plus grand, ou *base*, de rayon 3. Le centre de la roulante décrit alors un cercle de rayon 2, sa vitesse angulaire étant la moitié de la vitesse de rotation de la roulante et dirigée en sens contraire. Un point de la roulante décrit une hypocycloïde. La formule ci-dessus traduit justement ce résultat.

Remarque. On montre que l'application étudiée n'admet que des singularités stables. Il ressort alors des résultats des problèmes précédents que, d'après le théorème de Whitney, l'application en question possède trois points fronces reliés par une ligne de pli en forme de

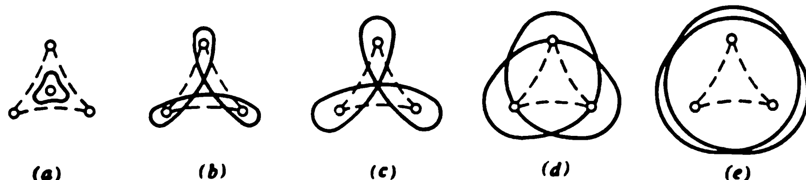


Fig. 17

cercle. Ainsi donc, le point singulier composé de l'application $w = z^2$ se sépare en trois points fronces quand on fait bouger l'application $w = z^2 + \varepsilon\bar{z}$.

Remarquons en outre que pour $|\varepsilon|$ petit le cercle des points critiques a aussi un rayon très petit (égal à $|\varepsilon|/2$), si bien que tous les trois points fronces sont très rapprochés.

Problème. Faire les dessins des images de cercles de rayons différents $|z| = r$ par l'application $w = z^2 + 2\bar{z}$.

S o l u t i o n. Comme 0 se transforme en 0, l'image d'un cercle de petit rayon est peu différente d'un petit cercle centré en 0. Quand r croît de 0 à 1, on obtient une famille de courbes lisses tendant vers une hypocycloïde à trois cusps (fig. 17, *a*). Pour dessiner l'image d'un cercle de rayon un peu plus grand au voisinage des images des points fronces, on peut prendre pour modèle la fronce représentée sur la figure 8. Au voisinage de l'image d'un point pli, cette image du cercle se situe du même côté de l'hypocycloïde que celle du cercle de rayon légèrement inférieur à 1. On obtient une courbe à trois boucles proche d'une hypocycloïde (fig. 17, *b*).

En faisant croître encore plus le rayon du cercle image réciproque, les boucles deviennent plus amples et la courbe s'éloigne de l'hypocycloïde. Pour un certain r on a un point triple (fig. 17, *c*), puis la courbe passe par les images des points fronces (fig. 17, *d*),

et finalement on obtient une courbe à trois points doubles qui ne rencontre pas l'ensemble des valeurs critiques (fig. 17, *e*).

Remarque. La dernière courbe est proche d'un cercle ; elle entoure deux fois $w = 0$ pendant que z fait un tour autour de 0. En effet, l'application $w = z^2 + \varepsilon\bar{z}$ tend en tout domaine fini vers $w = z^2$ quand $\varepsilon \to 0$; de ce fait, l'application $w = z^2 + 2\bar{z}$ doit se comporter « au voisinage de l'infini » « à peu près comme » $w = z^2$.

Problème. Les points des domaines intérieur et extérieur à l'hypocycloïde des valeurs critiques, combien d'images réciproques admettent-ils par l'application $w = z^2 + \varepsilon\bar{z}$?

Réponse. Quatre à l'intérieur, deux à l'extérieur

On montre que la singularité de $w = z^2$ en 0 se décompose en trois fronces non seulement pour la petite déformation $w = z^2 + \varepsilon\bar{z}$ mais aussi pour toute petite déformation générique.

Problème. Considérons une application plan sur plan, produit direct de deux plis:

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2^2.$$

On demande d'étudier les singularités de sa déformée:

$$y_1 = x_1^2 + \varepsilon_1 x_2, \quad y_2 = x_2^2 + \varepsilon_2 x_1, \ \varepsilon \text{ petits}.$$

Réponse. Voir fig. 18.

1.9. Singularités des applications de variétés de dimension 2 dans des variétés de dimension 3. Whitney a également décrit les singularités des applications génériques de variétés bidimensionnelles en

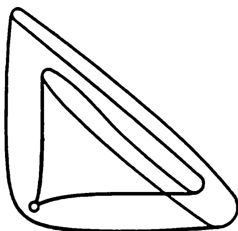


Fig. 18

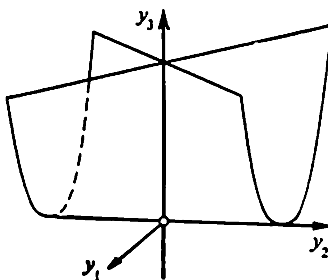


Fig. 19

variétés tridimensionnelles. Elles sont aussi en nombre fini. L'image par une telle application est une surface dans l'espace tridimensionnel. Les singularités évidentes sont des lignes d'intersection de deux feuillets sous un angle non nul, ainsi que des points où viennent se

couper trois feuillets. Il se trouve qu'en dehors de ces singularités, les applications génériques ne peuvent en présenter qu'une seule. C'est une singularité stable. L'image par l'application correspondante est une surface remarquable dans l'espace tridimensionnel, dite *parapluie de Whitney* (ou *de Cayley*), montrée sur la figure 19.

La surface représentée coupe les plans $y_3 =$ Cte suivant des paires de droites $y_1^2 = ay_2^2$ et les plans $y_2 =$ Cte suivant des paraboles $y_3 = by_1^2$. Son équation est donc $y_1^2 = y_3 y_2^2$.

Remarque. Dans $\mathbf{R}^3$ l'équation indiquée est vérifiée non seulement par les points de la surface représentée où la ligne de self-intersection est le demi-axe positif des y_3, mais en général par tous les points de l'axe des y_3. L'ensemble défini par cette équation a donc bien la forme d'une espèce de parapluie ayant pour manche le demi-axe négatif des y_3.

Problème. Chercher une application différentiable $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ ayant pour image le parapluie de Whitney sans manche.

Réponse. $y_1 = x_1 x_2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1^2$.

Définition. On appelle *singularité de Whitney* d'une application $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ un germe d'application en 0 du plan dans l'espace, défini par la formule précédente

Whitney a montré que cette singularité est stable, que toute application d'une variété compacte de dimension 2 dans une variété de dimension 3 se laisse approcher par des applications stables et que les applications stables n'ont aucune autre singularité (voir [337], [338]).

1.10. Autres dimensions. Une application générique du cercle dans l'espace tridimensionnel n'a aucune singularité: une petite déformation suffit à supprimer toutes les singularités. Encore dans les années trente, Whitney a montré qu'une application différentiable générique $f: M^m \to N^n$ n'a pas de singularités (i.e. est un plongement) si l'espace but est de dimension suffisamment élevée, plus exactement si $n > 2m$ *). Pour $n = 2m$ on établit tout aussi facilement la liste des singularités (seules apparaissent des self-intersections transversales de l'image), voir [335]-[338].

---

*) La dimension de l'espace des cordes d'une variété M^m plongée dans $\mathbf{R}^k$ est égale à $2m$, celle de l'espace des tangentes, à $2m - 1$, et celle de l'espace des directions dans $\mathbf{R}^k$, à $k - 1$. La projection de M^m dans $\mathbf{R}^{k-1}$ est donc un plongement pour presque toute direction de projection, à condition que $k > 2m + 1$. Si k est suffisamment grand, on n'a aucune peine à approcher l'application différentiable de M^m dans $\mathbf{R}^k$ par un plongement. En faisant les projections ($\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{k-1} \to \ldots \to \mathbf{R}^{2m+1}$), on finit par obtenir un plongement de M^m dans $\mathbf{R}^{2m+1}$.

Le cas contraire où le but est de faible dimension est celui d'une fonction unique, $n = 1$. Dans ce cas toutes les singularités d'une application générique sont stables comme précédemment, et toutes les applications stables se définissent localement par une liste finie ($y = x$ ou $y = \pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_m^2$).

Nous avons réuni sur la figure 20, dans le plan (m, n), tous les cas envisagés jusqu'à présent. En ces dimensions les applications génériques sont stables. Or, on constate que la situation n'est pas

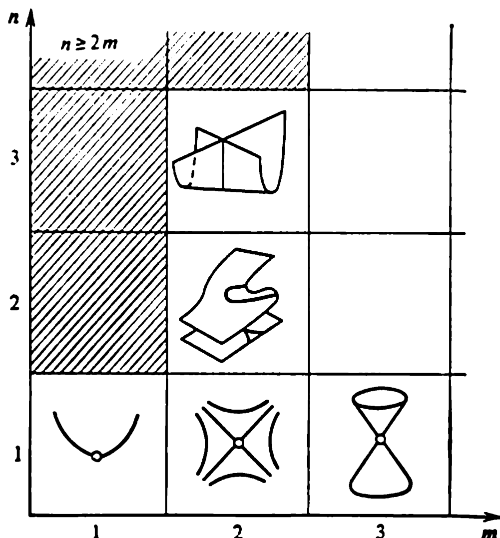


Fig. 20

aussi bonne pour tous (m, n). Par exemple, pour $m = n = 9$ l'ensemble des applications stables n'est pas dense dans l'espace des applications et on ne peut pas dresser une liste finie des singularités d'applications génériques. Les classes d'équivalence différentiable des singularités des applications génériques en un point ne forment pas alors un ensemble discret mais un ensemble continu (il existe des invariants continus des singularités, ou *modules*). Il y a plus : quand m et n sont grands, le nombre de modules devient infini lui-même et les types des singularités commencent à dépendre de fonctions arbitraires dont le nombre d'arguments croît avec la dimension. Nous reviendrons sur cette question au § 3 (n° 3.7, p. 59).

§ 2. Classes Σ^I

Dans ce paragraphe les singularités seront classifiées suivant le rang de la différentielle première de l'application et suivant les rangs de ses restrictions aux sous-variétés des singularités.

2.1. Classification suivant la dégénérescence de la différentielle première. Soient $f: M^m \to N^n$ une application différentiable et $f_{*x}: T_xM^m \to T_{f(x)}N^n$ sa dérivée au point x.

Définition. On dit que x est un *point de classe* Σ^i *pour* f si le noyau de f_{*x} est de dimension i. L'ensemble des points de classe Σ^i pour f forme une partie de M, dite *ensemble* Σ^i *pour* f, qui se note $\Sigma^i(f)$.

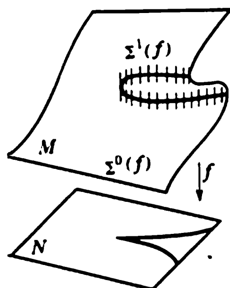


Fig. 21

Exemple. Pour l'application de la fronce de Whitney (fig. 21)

$$M = \mathbf{R}^2,\ N = \mathbf{R}^2,\ f_1(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1x_2,$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_2$$

tous les points critiques sont de classe Σ^1 et tous les points non critiques de classe Σ^0.

Remarque. En particulier, tous les points plis et fronces sont de même classe Σ^1.

L'application $w = z^2$ du plan réel admet en 0 une singularité de classe Σ^2. D'après le théorème de Whitney, les applications génériques de variétés de dimension 2 n'ont pas de singularités de classe Σ^2. Une question se pose: quelle est la structure de l'ensemble $\Sigma^i(f)$ pour une application générique $f: M^m \to N^n$? En particulier, quelle est sa dimension et dans quelles conditions est-il non vide? Pour formuler la réponse, nous aurons besoin d'une

Définition. Soit $A: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ un opérateur linéaire de rang r. On appelle *corang* de A dans le but (resp. dans la source) la différence $n - r$ (resp. $m - r$).

Remarque. Les corangs sont liés à la dimension i du noyau par des formules évidentes : $m - r = i$; $n - r = n - m + i$.

Théorème (« formule du produit des corangs »). *Pour les applications génériques* *) $f: M^m \to N^n$ *tous les ensembles* $\Sigma^i(f)$ *sont des sous-variétés différentiables dans l'espace source. La codimension de la variété* $\Sigma^i(f)$ *est alors égale au produit des corangs*:

$$\dim M - \dim \Sigma^i(f) = (m - r)(n - r)$$

(*la dimension est négative quand l'ensemble est vide*).

Pour comprendre l'origine de cette formule, considérons d'abord le problème correspondant d'algèbre linéaire.

---

*) L'ensemble des applications qui ne vérifient pas ce théorème est une réunion au plus dénombrable d'ensembles fermés, nulle part denses dans l'espace des applications différentiables; si par ailleurs M est compact, alors l'ensemble des applications génériques en question est ouvert et partout dense.

2.2. Stratification de l'espace des opérateurs linéaires. Considérons l'ensemble des opérateurs linéaires $A: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$. C'est un espace vectoriel de dimension finie mn (en choisissant convenablement les bases, on identifie les opérateurs avec des matrices d'ordre $m \times n$). Cet espace sera noté $L(m, n)$. Les groupes des changements linéaires de coordonnées dans l'espace source GL (m) et dans l'espace but GL (n) opèrent dans l'espace des matrices $L(m, n)$: on a donc une RL-action du produit direct des deux groupes. Deux matrices sont dans une même orbite de l'action si elles sont matrices d'un même opérateur pour deux choix différents de bases dans les espaces source et but.

Quitte à choisir convenablement les bases, on peut mettre la matrice de tout opérateur A sous une forme spéciale

$$(A_0) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{m}\Bigg\} n,$$

où E_r est la matrice unité d'ordre $r = \text{rang}\, A$. Ainsi donc, l'ensemble des matrices d'ordre $m \times n$, de rang r, est une orbite unique de la RL-action du groupe GL $(m) \times$ GL (n) sur $L(m, n)$.

Lemme. *L'ensemble de toutes les matrices de rang r forme dans $L(m, n)$ une sous-variété différentiable de codimension égale au produit des corangs.*

D é m o n s t r a t i o n. Puisque toute matrice d'opérateur de rang r se laisse mettre sous la forme A_0 par un choix convenable de la base, il suffit de démontrer le lemme dans un voisinage de cette matrice. Mettons une matrice proche de A_0 sous la forme $A = A_0 + (a_{k,l})$. Quand $(a_{k,l})$ sont petits, le rang de A est non inférieur à r. Il devient égal à r si et seulement si tous les mineurs d'ordre $r + 1$ encadrant E_r sont nuls.

Nous obtenons un système d'équations en éléments de la matrice $(a_{k,l})$, équations qui définissent la variété L_r au voisinage de la matrice A_0. Le nombre d'équations est égal à celui des mineurs encadrants d'ordre $r + 1$, i.e. au produit des corangs $(m - r)(n - r)$. Ces équations sont indépendantes. En effet, considérons un mineur encadrant obtenu en ajoutant la ligne et la colonne dont l'intersection contient $a_{k,l}$. Le développement taylorien de ce mineur suivant a commence par le terme $a_{k,l} + O(a^2)$. Pour cette raison les différentielles en 0 de nos $(m - r)(n - r)$ mineurs sont indépendantes.

Puisque les différentielles des mineurs sont indépendantes, la nullité des mineurs définit, d'après le théorème de la fonction implicite, une sous-variété dont la codimension est égale au nombre d'équations, ce qu'il fallait démontrer.

La partition de l'espace des opérateurs linéaires (matrices) $L(m, n)$ en sous-variétés L_r d'opérateurs (matrices) de rangs différents s'appelle *stratification naturelle* (*canonique*), et les variétés L_r, les *strates*. Nous venons de calculer les codimensions des strates : elles sont égales aux produits des corangs. Par exemple, pour $m = n$ les strates de corang 1, 2, 3, ... ont les codimensions respectives 1, 4, 9, ...

Problème. Chercher la codimension de l'ensemble des matrices symétriques de corang k dans l'espace des matrices symétriques d'ordre n.

Réponse. $k(k+1)/2$, i.e. 1, 3, 6, . . . pour $k = 1, 2, 3, ..$

2.3. Théorèmes de transversalité. Pour déduire le théorème énoncé au nº 2.1 du lemme algébrique du nº 2.2, introduisons quelques notions et théorèmes généraux.

Définition. On dit que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sont *transversaux* si leur somme occupe l'espace tout entier (fig. 22).

Exemple. Deux sous-espaces de dimension 1 d'un espace de dimension 3 ne sont jamais transversaux ; ses deux sous-espaces distincts

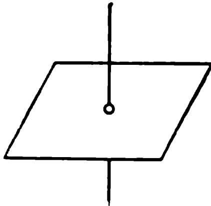


Fig. 22

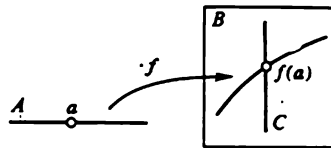


Fig. 23

de dimension 2 sont toujours transversaux ; enfin, un sous-espace de dimension 1 et un sous-espace de dimension 2 de cet espace ne sont transversaux que si le premier n'appartient pas au second.

Définition. Soit une application différentiable $f: A \to B$ d'une variété A dans une variété B, et soit C une sous-variété différentiable de B. On dit que l'application f est *transversale* à C au point a de A si $f(a)$ n'appartient pas à C ou si (fig. 23) l'image par l'application dérivée f_{*a} de l'espace tangent en a à A est transversale à l'espace tangent à C:

$$f_{*a}T_aA + T_{f(a)}C = T_{f(a)}B.$$

On dit que f est *transversale* à C si f est transversale à C en tout point de A.

Proposition. *Si f: $A \to B$ est transversale à C, alors $f^{-1}(C)$ est une sous-variété différentiable de A dont la codimension dans A est égale à celle de C dans B.*

Exemple. Soit C une courbe dans l'espace B de dimension 3, et soit A de dimension 1. Alors f: $A \to B$ est transversale à C si et seulement si l'image de A ne rencontre pas C.

Remarque. Il se peut que l'image de A par f soit transversale dans B à C sans que f soit elle-même transversale à C.

Exemple. Tel est le cas de l'application de la droite $A = \{a\}$ sur le plan $B = \{(b_1, b_2)\}$ définie par les formules $b_1 = a^3$, $b_2 = 0$, et de la sous-variété C $(b_1 = 0)$ de B.

Remarque. Le cas le plus important est celui où B est un espace vectoriel et C un sous-espace de B. Soient D l'espace quotient et p la projection canonique p: $B \to D$ qui envoie C dans 0. Avec ces notations, l'application f: $A \to B$ est transversale à C si et seulement si 0 est une valeur non singulière de l'application $p \circ f$: $A \to D$. (La valeur singulière d'une application est sa valeur dans un point singulier; un point singulier est un point en lequel la dérivée n'est pas surjective; pour les applications f: $M^m \to N^n$ telles que $m < n$, tous les points de M sont singuliers, alors que les valeurs singulières sont les points de $f(M)$.)

Théorème de transversalité faible. *Les applications transversales à une sous-variété différentiable fermée C de la variété B forment un ensemble ouvert partout dense dans l'espace des applications différentiables d'une variété fermée *) A dans B.*

Remarque. Il est intuitif (fig. 24) qu'en faisant bouger l'application, on peut la rendre générique et transversale.

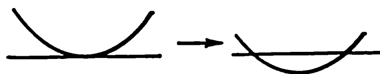


Fig. 24

Pour la démonstration, il est commode d'utiliser un théorème démontré par Bertini en géométrie algébrique et par Sard dans le cas des fonctions différentiables.

Théorème de Bertini-Sard. *Les valeurs singulières de toute application suffisamment différentiable forment un ensemble de mesure nulle.*

Remarque. Quant aux points singuliers, ils peuvent former un ensemble de mesure positive. Un exemple : $f(x) \equiv 0$.

---

*) Compacte sans bord.

Démonstration du théorème de Bertini-Sard. Commençons par un cas particulier élémentaire.

Proposition 1. *Soit $y = f(x)$ une fonction différentiable sur* $[0, 1]$. *Alors les valeurs singulières de l'application f forment un ensemble de mesure nulle.*

Démonstration. Faisons une partition de $[0, 1]$ en N segments de longueur égale. Marquons les segments qui contiennent des points singuliers. La mesure de l'image d'un segment marqué est majorée par la quantité C/N^2, où C est une constante indépendante de N et du segment (vu que la dérivée de f sur le segment marqué est bornée supérieurement en module par la quantité C/N). La somme des mesures des segments marqués n'excède donc pas le produit $N \cdot (C/N^2)$. Pour $N \to \infty$ la somme des mesures tend vers zéro, ce qui démontre la proposition 1.

Proposition 2. *Soit f une application différentiable du cube* $[0, 1]^m$ *de dimension m dans l'espace euclidien de dimension m. Les valeurs singulières de f forment alors un ensemble de mesure nulle.*

Démonstration. Par un raisonnement analogue à la proposition 1, on peut faire un recouvrement de l'ensemble des valeurs singulières par au plus $(N)^m$ ensembles dont chacun est de mesure non supérieure à $C\,(1/N)^{m+1}$, ce qui démontre la proposition 2.

Proposition 3. *Soit f une application différentiable de* $[0, 1]^m$ *dans l'espace euclidien de dimension n. Alors l'image de l'ensemble des points où s'annulent toutes les dérivées de f d'ordres $1, \ldots, k$ est de mesure nulle, à condition que k soit suffisamment grand (il suffit que $(k + 1)\,n > m$).*

Remarque. En particulier, pour $n > m$ l'image du cube est tout entière de mesure nulle.

Démonstration. Par analogie aux propositions 1 et 2, faisons un recouvrement de l'ensemble des valeurs par au plus $(N)^m$ ensembles de diamètre non supérieur à $C_1\,(1/N)^{k+1}$. La mesure est donc majorée par $CN^m\,(1/N)^{(k+1)n}$, ce qui démontre la proposition 3.

Nous avons donc démontré le théorème pour les applications dans un espace de dimension (n) égale ou supérieure à celle de la variété appliquée (m). Si $m > n$, un raisonnement supplémentaire s'impose. Considérons le cas le plus simple d'une fonction unique.

Proposition 4. *Soit f une fonction différentiable de deux variables. Les valeurs singulières de l'application f forment alors un ensemble de mesure nulle.*

Démonstration. Les valeurs aux points où les dérivées secondes s'annulent toutes les trois, forment un ensemble de mesure nulle d'après la proposition 3 (pour $m = 2$, $n = 1$ il suffit de pren-

dre $k = 2$). Considérons donc les points singuliers où une dérivée seconde, par exemple $\partial^2 f/\partial x^2$, est distincte de zéro. L'équation $\partial f/\partial x = 0$ est celle d'une courbe lisse (d'après le théorème de la fonction implicite). Les points singuliers en question appartiennent à cette courbe et restent singuliers pour la restriction de f à la courbe. Conformément à la proposition 1, les valeurs de f dans ces points singuliers forment un ensemble de mesure nulle. Pour les autres dérivées secondes on raisonne de même. La proposition 4 est démontrée.

Proposition 5. *Soit f une fonction différentiable de m variables. Ses valeurs singulières forment alors un ensemble de mesure nulle.*

D é m o n s t r a t i o n. Par le même raisonnement que dans la proposition 4, nous démontrerons la proposition 5 par récurrence sur m. Considérons l'ensemble des points en lesquels toutes les dérivées jusqu'à l'ordre q inclus s'annulent et l'une des dérivées d'ordre $q + 1$ (par exemple la dérivée $\partial\varphi/\partial x$, où φ est la dérivée d'ordre q) est distincte de zéro. Cet ensemble est contenu dans l'ensemble des points singuliers de la restriction de f à la sous-variété de dimension $m - 1$ définie par $\varphi = 0$. La proposition 5 s'en trouve donc réduite aux propositions 3 et 1.

Dans le cas de la dimension $n > 1$, on peut procéder aussi par récurrence, seulement on se heurte à cette difficulté qu'en général les dérivées premières ne s'annulent pas toutes au point singulier.

Proposition 6. *Soit f une application définie par n fonctions f_i de m variables x_j, et soit $\partial f_1/\partial x_1 \neq 0$ dans un certain point. On peut alors introduire, au voisinage de ce point, des coordonnées ξ telles que l'application se laisse mettre sous la forme d'une famille g_{ξ_1} d'applications à un paramètre d'un espace de dimension $(m - 1)$ dans un espace de dimension $(n - 1)$:*

$$y_1 = \xi_1, \quad y' = g_{\xi_1}(\xi') \quad (\xi' = \xi_2, \ldots, \xi_m, \quad y' = y_2, \ldots, y_n).$$

D é m o n s t r a t i o n. Introduisons des coordonnées locales $\xi_1 = f_1$, $\xi' = x'$. Elles forment un système, d'après le théorème de la fonction implicite. La proposition 6 est démontrée.

Il est clair que l'ensemble des valeurs singulières de l'application g de la proposition 6 est une réunion d'ensembles, $S = \bigcup (\xi_1, S(\xi_1))$, où $S(\xi_1)$ est l'ensemble des valeurs singulières de l'application g_{ξ_1}. On a donc mes $S = 0$ si (pour tout ξ_1) on a mes $S(\xi_1) = 0$ (théorème de Fubini).

Le théorème de Bertini-Sard se démontre maintenant par récurrence sur la dimension de l'espace source : au voisinage des points singuliers où les dérivées premières ne sont pas toutes nulles, nous abaissons la dimension à l'aide de la proposition 6, et dans les points

singuliers où toutes les dérivées premières s'annulent, à l'aide des propositions 5 et 3.

Démonstration du théorème de transversalité faible. Nous allons démontrer le théorème dans un cas spécial où C est un sous-espace vectoriel de B. Supposons que l'application considérée $f: A \to B$ appartienne à une famille d'applications f_ε, où $f_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon$ $(\varepsilon \in B)$.

Soient $p: B \to B/C$ une projection canonique et $p(\varepsilon)$ une valeur non critique de l'application $p \circ f$. Alors f_ε est transversale à C. D'après le théorème de Bertini-Sard, il existe des ε, aussi petits que l'on veut, pour lesquels $p\varepsilon$ n'est pas une valeur singulière de $p \circ f$. Cela démontre la partie « partout dense » du théorème de transversalité pour le cas spécial envisagé (le cas général s'y ramène sans peine) ; il est évident que les applications d'une variété fermée transversales à une sous-variété fermée forment un ensemble ouvert.

Le théorème de transversalité faible ne convient pas pour la démonstration du théorème sur le produit des corangs (n° 2.1), car l'application concernée par ce théorème est définie non pas par l'application différentiable donnée $M \to N$ mais par sa *dérivée*. Or, le théorème de transversalité faible dit seulement qu'on peut rendre générique, en la faisant bouger, toute application dans la classe de *toutes* les applications, mais n'affirme pas du tout que l'application ainsi déformée soit une dérivée, i.e. qu'on puisse rendre la dérivée générique en faisant bouger l'application *initiale* $M \to N$.

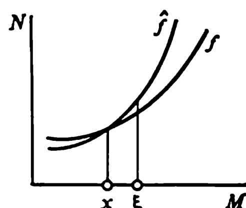


Fig. 25

Un obstacle analogue se rencontre dans beaucoup d'autres problèmes. Pourtant il est toujours surmontable, car les conditions d'intégrabilité ne s'opposent pas à la mise en « position générale ». Pour formuler le théorème correspondant, dit théorème de transversalité fort ou théorème de transversalité tout court, nous aurons besoin de quelques notions nouvelles, qui nous seront d'ailleurs utiles partout dans la suite.

Soient $f: M^m \to N^n$ une application différentiable et x un point de M (fig. 25).

Définition. L'application $\hat{f}$ est *tangente d'ordre k à f* en x si

$$\rho_N(\hat{f}(\xi), f(\xi)) \leqslant o(\rho_M(\xi, x))^k,$$

où ρ_N, ρ_M sont des métriques riemaniennes quelconques sur N, M respectivement.

Exemple. Soit $m = n = 1$, i.e. f et $\hat{f}$ sont des fonctions d'une variable. La tangence d'ordre $k = 0$ signifie qu'elles prennent les

mêmes valeurs en x, $\hat{f}(x) = f(x)$. Si elles sont tangentes d'ordre 1, c'est qu'en x $f(x) = \hat{f}(x)$ et $f'(x) = \hat{f}'(x)$; si f et $\hat{f}$ sont tangentes d'ordre k, leurs développements tayloriens en x coïncident jusqu'aux termes de degré k inclus.

Remarquons que les applications sont tangentes ou non indépendamment du choix des métriques pour la définition. La relation « tangent d'ordre k en x » est une relation d'équivalence.

Définition. La classe d'équivalence d'applications différentiables suivant la relation d'équivalence « tangent d'ordre k en x » s'appelle le *k-jet au point x*.

Notation. Le k-jet de l'application f au point x est noté $j_x^k f$.

Exemple. Le 1-jet d'une fonction d'une variable se définit par le triplet de nombres $(x, y, p = dy/dx)$.

Dans des systèmes de coordonnées fixés, le k-jet se présente comme un polynôme de Taylor de degré k.

Définition. L'ensemble des k-jets d'applications différentiables d'une variété donnée M^m dans une variété donnée N^n (dans tous les points de M^m) est appelé *espace des k-jets des applications de M^m dans N^n*.

Notation. L'espace des k-jets d'applications de M^m dans N^n est noté $J^k(M^m, N^n)$.

Exemple. L'espace des 1-jets d'applications droite sur droite J^1 (R, R) est un espace à trois dimensions muni de coordonnées (x, y, p).

Dans le cas général, l'espace des k-jets $J^k(M^m, N^n)$ est une variété différentiable. Soient en effet $(x_1, \ldots, x_m)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ des coordonnées locales dans M^m, N^n respectivement, introduites sur les voisinages des points x, $f(x)$ respectivement. Une application f se définit localement par les formules

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots x_m), \ldots y_n = f_n(x_1, \ldots x_m).$$

Un k-jet se définit par la donnée des nombres suivants:

$$\{x_1, \ldots x_m\}; \quad \{y_1, \ldots y_n\}; \quad \left\{\frac{\partial f_r}{\partial x_s}\right\}, \quad \left\{\frac{\partial^2 f_r}{\partial x_i \, \partial x_j}\right\}, \ldots \quad \left\{\frac{\partial^{|k|} f_r}{\partial x^k}\right\}.$$

Ces nombres définissent des coordonnées locales dans l'espace des k-jets qui se munit ainsi d'une structure de variété différentiable $J^k(M^m, N^n)$. Localement, la variété $J^k(M^m, N^n)$ peut se présenter comme un espace de polynômes de Taylor de degré k. La dimension d'une variété de k-jets se calcule sans difficulté:

$$J^0(M, N) = M^m \times N^n, \ \dim J^1(M, N) = m + n + mn, \ldots$$

Les variétés de k-jets se munissent naturellement d'une série de structures supplémentaires.

Un développement taylorien de longueur k définit celui de longueur $k-1$. On a donc une suite de projections

$$\begin{matrix} M \nwarrow & & & & \\ & J^0(M,N) & \leftarrow & J^1(M,N) & \leftarrow \ldots \\ N \swarrow & & & & \end{matrix}$$

A l'exception des deux applications de gauche, les applications de cette suite — applications d'« oubli » des termes de degré k d'une série de Taylor — sont des fibrations différentiables. Leurs fibres sont difféomorphes à des espaces vectoriels. Dans le cas $J^1(M, N) \to \to J^0(M, N)$ la fibre au-dessus du point (x, y) est un espace d'opérateurs linéaires Hom (T_xM, T_yN). Cette fibre a une structure naturelle d'espace vectoriel. Pour $k > 1$ la fibre du fibré $J^k \to J^{k-1}$ n'a pas la structure vectorielle naturelle (« théorème de la non-invariance des différentielles supérieures »). En effet, la fibre indiquée peut être identifiée, dans tout système de coordonnées donné, avec l'espace des collections de n polynômes homogènes de degré k en m variables, ce qui fait qu'elle est difféomorphe à un espace vectoriel. Or, ce difféomorphisme est non canonique (il dépend du choix du système de coordonnées), si bien que la fibre ne possède pas la structure vectorielle naturelle.

Soit $f: M^m \to N^n$ une application différentiable.

Définition. On appelle *extension à k-jets d'une application f* une application de M^m dans l'espace des k-jets d'applications de M^m dans N^n qui à tout point x de M fait correspondre le k-jet de f en ce point.

Notation. L'extension à k-jets de l'application f est notée $j^kf: M^m \to J^k(M^m, N^n)$, $x \mapsto j_x^kf$.

Remarquons que j^kf est une section différentiable du fibré naturel $J^k(M, N) \to M$.

Théorème de transversalité fort (Thom). *Soient M^m une variété fermée et C une sous-variété fermée de l'espace des jets $J^k(M, N)$. Les applications $f: M \to N$ dont les extensions à k-jets sont transversales à C forment alors un ensemble ouvert partout dense dans l'espace des applications différentiables de M dans N.*

Ce théorème signifie qu'en faisant bouger une application différentiable, on peut la rendre générique non seulement par rapport à n'importe quelle sous-variété différentiable de l'espace but mais aussi par rapport à toute condition imposée aux dérivées d'ordre fini quelconque.

Remarque. Le théorème faible découle du théorème fort pour $k = 0$. Au contraire, le théorème fort ne peut pas être déduit directement du théorème faible. La cause en est la suivante.

En vertu du théorème faible on pourrait obtenir une application proche de l'application $j^k f \colon M \to J^k$ et transversale à C. Or, une telle application proche n'est en général l'extension à k-jets d'aucune application différentiable de M dans N.

D'après le théorème de transversalité fort, on peut choisir la déformation transversalisatrice dans une classe de déformations plus restreinte: il suffit de prendre la déformation d'une extension à k-jets dans l'espace des extensions à k-jets et non dans l'espace de toutes les sections $M \to J^k$. Donc, conformément à ce théorème, les conditions d'intégrabilité (qui distinguent les extensions à k-jets d'applications de M dans N parmi les sections quelconques $M \to J^k$) ne s'opposent pas à la transversalité.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e. Comme pour le théorème faible, tout se réduit au théorème de Sard. Il y a cependant une différence: on cherche la déformation transversalisatrice non pas dans la classe des applications $f_\varepsilon = f - \varepsilon$ mais dans une classe plus large de déformations polynomiales $f_\varepsilon = f + \varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_s e_s$, où e_i sont tous les monômes vecteurs de degré non supérieur à k.

Lemme 1. *Considérons une application différentiable $F \colon A \times E \to B$ du produit direct de variétés différentiables A, E dans une variété différentiable B. Assimilons F à une famille d'applications F_ε de A dans B qui dépendent du point ε de E comme d'un paramètre. Alors, si F est transversale à une sous-variété C de B, presque chaque terme $F_\varepsilon \colon A \to B$ de la famille correspondant à F est transversal à C.*

D é m o n s t r a t i o n. Considérons $F^{-1}(C)$. D'après le théorème des fonctions implicites, c'est une sous-variété différentiable dans $A \times E$. Faisons la projection de cette sous-variété sur E parallèlement à A. D'après le théorème de Sard, presque toutes les valeurs de la projection sont non singulières. Soit ε une valeur non singulière. Alors $F_\varepsilon \colon A \to B$ est transversale à C (car F est transversale à C et $A \times \varepsilon$ l'est à $F^{-1}(C)$). Le lemme est démontré.

Lemme 2. *Soit f une application différentiable de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$. Choisissons des systèmes de coordonnées dans $\mathbf{R}^m$ et $\mathbf{R}^n$ et considérons une application différentiable du produit direct de $\mathbf{R}^m$ par $\mathbf{R}^s$ dans l'espace des k-jets d'applications $J^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ définie par la formule*

$$(x, \varepsilon) \mapsto (f^k_x / \varepsilon),$$

où $f_\varepsilon = f + \varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_s e_s$ (ici $e_1, \ldots, e_s$ sont les produits des monômes de degré non supérieur à k en coordonnées du point x de $\mathbf{R}^m$ par les vecteurs de base de $\mathbf{R}^n$).

Nous disons que l'application ainsi construite n'a aucune valeur singulière (et donc est transversale à toute sous-variété de l'espace des k-jets).

Les coordonnées dans l'espace J^k sont celles du point x de $\mathbf{R}^m$ et les coefficients tayloriens du jet en x jusqu'à l'ordre k inclus. Quitte à choisir convenablement les coefficients $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$, on arrive à associer au polynôme vecteur $\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_s e_s$ en tout point x choisi à l'avance toute collection choisie à l'avance de coefficients tayloriens jusqu'à l'ordre k inclus, d'où le lemme.

Fin de la démonstration du théorème. Soit C une sous-variété différentiable de $B = J^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$. Utilisons pour l'application du lemme 2 le résultat du lemme 1 (dans lequel $A = \mathbf{R}^m$, $E = \mathbf{R}^s$; $F(x, \varepsilon) = j^k_x f_\varepsilon$). D'après le lemme 1, l'application $F_\varepsilon = F(\cdot, \varepsilon)$ est transversale à C pour presque tout ε. Quitte à prendre ε suffisamment petit, on obtient une application f_ε: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ suffisamment proche de f (en toute partie finie de $\mathbf{R}^m$) et telle que son extension à k-jets soit transversale à C. Le passage de cette construction locale au cas global (changement de $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{R}^n$ en M, N) n'offre aucune difficulté.

Remarque 1. Si C est non fermé, on doit remplacer « ensemble ouvert » par « intersection dénombrable d'ensembles ouverts » dans le théorème faible et *a fortiori* dans le théorème fort. Exemples : 1) B est un tore, C son enroulement, A un cercle ; 2) B est un plan, A un cercle dans B, C une tangente (sans point de tangence). Le plongement est transversal à C, mais il existe des applications aussi proches que l'on veut de ce plongement qui ne sont pas transversales à C.

Remarque 2. Si la variété source est non compacte, il est commode de munir l'espace but de la « topologie fine de Whitney ». Dans cette topologie le voisinage d'une application $f: A \to B$ se définit comme suit. Fixons un ensemble ouvert G dans l'espace des jets $J^k(A, B)$ pour un certain k. L'ensemble des C^∞-applications $f: A \to B$ dont les k-jets en tout point appartiennent à G est ouvert pour la topologie fine. On prend de tels ensembles ouverts non vides comme base des voisinages qui définissent la topologie fine dans l'espace des applications indéfiniment différentiables.

Si donc deux applications sont proches pour la topologie fine, elles se rapprochent aussi vite que l'on veut (ainsi que leurs dérivées d'ordre quelconque) « à l'infini » ; en particulier, le graphe d'une application suffisamment proche de f appartient à un voisinage du graphe de f qui se rétrécit aussi vite que l'on veut « à l'infini ».

Il s'ensuit que toute suite convergente en topologie fine devient stationnaire à partir d'un certain terme en dehors d'un ensemble compact. Cependant tout voisinage de l'application donnée en topologie

fine contient des applications qui ne coïncident en aucun point avec l'application donnée.

Si l'ensemble des applications est ouvert et partout dense pour la topologie fine, le théorème de transversalité est aussi vrai pour des A non compacts (pour que l'ensemble des applications soit ouvert, C doit être fermé).

Remarque 3. Dans bien des cas C n'est pas une sous-variété différentiable mais une sous-variété présentant des singularités.

Définition. On appelle *sous-variété stratifiée* d'une variété différentiable la réunion finie de variétés différentiables (strates) disjointes deux à deux, qui vérifie la condition suivante: l'adhérence de chaque strate contient la strate elle-même et une réunion finie de strates de dimensions plus petites.

Une application est *transversale à une sous-variété stratifiée* si elle est transversale à chaque strate.

Exemple. Soit C la réunion de deux plans qui se coupent suivant une droite dans l'espace à trois dimensions, et soit une stratification de C constituée par sa partition en la droite d'intersection et quatre demi-plans. Une application transversale à C doit l'être à chacun des plans et à la droite d'intersection. Par exemple, une courbe transversale à la variété stratifiée C ne rencontre pas la droite des singularités de C.

Les théorèmes de transversalité s'étendent évidemment au cas où la sous-variété C est stratifiée. Or, s'il en est ainsi, l'ensemble des applications transversales n'est pas un ensemble ouvert et partout dense mais seulement une intersection dénombrable et partout dense d'ensembles ouverts.

Si l'on veut que les applications transversales à une variété analytique stratifiée forment un ensemble ouvert et partout dense, il suffit d'imposer à la stratification une condition restrictive supplémentaire: tout plongement transversal à une strate de dimension k est transversal à toute strate voisine de dimension $l > k$ dans un voisinage de la première *).

Exemple 1. Soit C la réunion finie de plans dans un espace vectoriel, et soit une stratification naturelle de C (par exemple, C peut être une paire de plans sécants dans $\mathbf{R}^3$).

La transversalité à $\mathbf{R}^k$ implique celle à l'espace ambiant $\mathbf{R}^l$: la condition énoncée ci-dessus est vérifiée.

Exemple 2. Soit C un cône $x^2 = y^2 + z^2$ dans $\mathbf{R}^3$; stratifions-le en opérant sa partition en le point 0 et deux demi-surfaces coniques.

*) C'est aussi le cas pour les variétés stratifiées obtenues à partir de variétés analytiques par des difféomorphismes, mais ce n'est pas toujours le cas pour des variétés C^∞-stratifiées (voir [279]).

On s'assure tout aussi aisément que la condition précédente est vérifiée.

Exemple 3. Soit C un parapluie de Whitney (fig. 19) défini par l'équation $y_1^2 = y_3 y_2^2$ dans $\mathbf{R}^3$. La transversalité à la droite singulière $y_1 = y_2 = 0$ n'implique pas la transversalité à une variété de points réguliers de la surface proches de cette droite (le plan $y_3 = 0$ est transversal à la droite mais ne l'est pas à la surface).

Si la restriction imposée à la stratification de C (la transversalité au plus petit $\Rightarrow$ la transversalité au plus grand) est vérifiée, on en déduit la transversalité à la stratification tout entière en raisonnant comme suit:

1. les strates de dimension minimale sont différentiables, elles sont justiciables des théorèmes de transversalité;
2. la transversalité a lieu sur toutes les strates voisines de celles de dimension minimale;
3. éliminant de la variété ambiante l'adhérence du voisinage des strates de dimension minimale, on passe aux strates de dimension plus grande.

Exemple. Soit B un espace d'opérateurs linéaires b: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, et soit C un ensemble d'opérateurs de rang non maximal. Les opérateurs de rang r forment une sous-variété différentiable dont la codimension dans B est égale à $(m - r)(n - r)$. La partition en variétés d'opérateurs de rangs différents définit une stratification de C.

Une application f: $A \to B$ est une famille d'opérateurs linéaires de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$ qui dépendent différentiablement d'un point de A comme d'un paramètre. La variété A s'appelle *base* de la famille. Le théorème de transversalité faible donne aussitôt lieu à un

Corollaire. *Dans l'espace des familles différentiables de matrices d'ordre $m \times n$, les familles transversales à une variété stratifiée C de matrices de rang non maximal forment un ensemble partout dense.*

En particulier, les valeurs du paramètre auxquelles correspondent des matrices de rang r forment en général (pour les familles d'une intersection partout dense d'ensembles ouverts dans l'espace des familles) une variété différentiable de codimension $(m - r)(n - r)$ dans la base de la famille.

Démonstration du théorème du n° 2.1. Stratifions la variété des 1-jets $J^1(M, N)$ suivant les rangs de la différentielle première. Il est clair que l'ensemble de tous les 1-jets de différentielle première de rang r est une sous-variété différentiable de codimension $(m - r)(n - r)$ et que son adhérence se compose de variétés de jets de différentielle de rang non supérieur à r. D'après le théorème de transversalité (fort), on peut, en faisant bouger f, rendre son extension à 1-jets $j^1 f$ transversale à toutes les strates de la stratification construite, ce qui démontre le théorème.

Remarque. On s'assure sans peine que la condition « transversalité au plus petit $\Rightarrow$ transversalité au plus grand » est vérifiée pour la stratification d'un espace de matrices suivant les rangs. On montre en effet qu'il est possible d'affiner toute stratification algébrique de telle façon que la condition indiquée soit vérifiée. Il s'ensuit que la condition est vérifiée dans presque tous les points de chaque strate. Or, une variété de matrices de rang r est homogène : on peut transformer chaque point de cette variété en n'importe quel autre point de cette variété par l'action du produit direct de groupes linéaires de transformations de la source et du but qui conserve la stratification suivant les rangs. Par conséquent, la condition est vérifiée partout et non « presque partout ».

Si donc M est compact, les applications différentiables $f: M \to N$ dont les extensions à 1-jets sont transversales à la stratification de la variété $J^1(M, N)$ suivant les rangs forment un ensemble ouvert et partout dense.

2.4. Singularités secondaires. Revenons à l'application de la fronce de Whitney (fig. 21). Dans ce cas la stratification de M suivant les rangs se réduit à sa partition en deux ensembles : celui des points singuliers $\Sigma^1(f)$ et celui des points réguliers $\Sigma^0(f)$.

Remarquons que Σ^1 est une variété différentiable, le point fronce 0 y compris. C'est un point privilégié, car le noyau de f_* est tangent à Σ^1 en 0. Autrement dit, l'application f restreinte à la parabole Σ^1 est de rang 1 en tout point sauf le point 0. Le point 0 appartient donc à $\Sigma^1(f \mid \Sigma^1(f))$, alors que tous les autres points de la parabole appartiennent à $\Sigma^0(f \mid \Sigma^1(f))$. Introduisons la notation $\Sigma^{i_2}(f \mid \Sigma^{i_1}(f)) = \Sigma^{i_1, i_2}(f)$. Alors le point 0 (la fronce de Whitney) appartient à $\Sigma^{1,1}(f) \subset \Sigma^1(f)$.

Pour toute famille d'entiers $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, l'ensemble $\Sigma^I(f)$ se définit par récurrence comme suit.

Définition. Soit $\Sigma^I(f) = \Sigma^{i_1, \ldots, i_k}(f) \subset M$, où $\Sigma^I(f)$ est une variété différentiable. Alors

$$\Sigma^{i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}}(f) = \Sigma^{i_{k+1}}(f \mid \Sigma^I(f))$$

est un ensemble de points en lesquels le noyau de la différentielle de la restriction de f à $\Sigma^I(f)$ est de dimension i_{k+1}.

Remarque. Par définition, les variétés

$$M \supset \Sigma^{i_1} \supset \Sigma^{i_1, i_2} \supset \Sigma^{i_1, i_2, i_3} \supset \ldots$$

sont emboîtées. Il en est donc de même pour les noyaux des différentielles des restrictions de f à ces sous-variétés emboîtées $M \supset \Sigma^{i_1} \supset \supset \Sigma^{i_1, i_2} \supset \Sigma^{i_1, i_2, i_3}$. Par conséquent, la suite des entiers $i_1, i_2, i_3, \ldots$

de la famille I doit être non croissante: $m \geqslant i_1 \geqslant i_2 \geqslant i_3 \geqslant \ldots \ldots \geqslant 0$. Si l'une quelconque au moins de ces inégalités cesse d'être vraie, l'ensemble Σ^I devient vide.

Or, l'ensemble $\Sigma^I(f)$ n'est pas nécessairement une variété différentiable, et la définition citée ci-dessus (due à Thom) ne permet pas de définir $\Sigma^I(f)$ pour f quelconque.

Boardman a proposé [62] une autre définition de $\Sigma^I(f)$, en termes de jets. Pour toute famille d'entiers $I = (i_1, \ldots, i_k)$, il a défini un sous-ensemble Σ^I dans l'espace des k-jets $J^k(M^m, N^n)$, indépendant de toute application f (voir ci-après, p. 44). Il a démontré le

Théorème 1. *Un ensemble Σ^I indicié par toute famille $I = (i_1, \ldots \ldots, i_k)$ est une sous-variété lisse (non nécessairement fermée) de codimension $\nu_I(m, n)$ de $J^k(M^m, N^n)$.* (La formule de ν_I sera donnée un peu plus tard, p. 41.)

La signification des variétés Σ^I est dans le fait qu'une « bonne » application f admet en x une singularité $\Sigma^I(f)$ au sens de la définition précédente, $x \in \Sigma^I(f)$, si et seulement si le jet de f en x appartient à Σ^I.

Définition. Une application f est « *bonne* » si son extension à k-jets est transversale aux variétés Σ^I.

Boardman a également démontré le

Théorème 2. 1) *Si f est une « bonne » application, on a $\Sigma^I(f) = [j^k(f)]^{-1}(\Sigma^I)$, autrement dit $\Sigma^I(f)$ est une variété lisse de codimension $\nu_I(m, n)$ de M^m, et $x \in \Sigma^I(f)$ si et seulement si le jet de f en x appartient à Σ^I.*

2) *Toute application différentiable $f: M^m \to N^n$ peut être approchée, avec ses dérivées d'ordre quelconque, d'aussi près que l'on veut par une bonne application.*

La proposition 2) découle du théorème 1 ci-dessus et du théorème de transversalité fort.

Tous ces résultats ont été établis pour $k = 1$ par Thom [274] et pour $k = 2$ par Levine [273].

Exemple. La variété des matrices carrées de corang 1 est de codimension 1, celle des matrices de corang 2, de codimension 4, en général, la variété des matrices de corang k est de codimension k^2.

Corollaire. *Soit $f: M^m \to N^n$ une « bonne » application, en ce sens que l'application induite $x \mapsto$ (matrice de la différentielle de f en x) est transversale à la variété L_r des matrices de rang r. Alors l'ensemble $\Sigma^i(f)$ défini au début de ce paragraphe, $i = m - r$, est une sous-variété lisse de codimension $(m - r)(n - r) = i\,(n - m + i)$ de M^m.*

Exemple. Considérons des applications de variétés de même dimension $m = n$. L'ensemble $\Sigma^k(f)$ des points en lesquels le rang

d'une « bonne » application diminue de k unités est de codimension k^2.

D'autre part, toute application « de type générique » est bonne, car, d'après le théorème de transversalité fort, on peut approcher n'importe quelle application par une bonne application.

Il s'ensuit que, par exemple, la singularité Σ^2 est de codimension 4 et ne doit pas avoir lieu en général dans les applications plan sur plan (voir fig. 15 à 17). Or, cette singularité peut être non supprimable par les applications $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ pour $n \geqslant 4$.

Exemple. Deux bonnes applications $f_{\pm}$: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ définies par les formules

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3^2 \pm x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4, \\ y_4 = x_3x_4 \end{cases}$$

admettent en 0 un point non supprimable $\Sigma^{2,0}$.

Il sera montré dans le texte qui suit que les germes de $f_{\pm}$ en 0 ne sont pas équivalents, d'où il ressort que la classification des singularités suivant les classes Σ^I est incomplète.

2.5. Formule de Boardman pour la codimension de l'ensemble Σ^I. Soit $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$. La formule de Boardman pour la codimension de l'ensemble Σ^I s'écrit

$$\nu_I(m, n) = (n - m + i_1)\,\mu(i_1, i_2, \ldots, i_k) - \\ - (i_1 - i_2)\,\mu(i_2, i_3, \ldots, i_k) - \ldots - (i_{k-1} - i_k)\,\mu(i_k),$$

où $\mu(i_1, \ldots, i_k)$ est le nombre des suites $j_1, j_2, \ldots, j_k$ d'entiers vérifiant les conditions suivantes:

a) $j_1 \geqslant j_2 \geqslant \ldots \geqslant j_k$;

b) $i_r \geqslant j_r \geqslant 0$ pour tout r tel que $1 \leqslant r \leqslant k$, avec $j_1 > 0$.

Nous reviendrons sur le sens de la quantité $\mu(I)$ et l'origine de cette formule plus tard. Pour le moment, examinons quelques cas particuliers élémentaires.

Exemple. Pour $k = 1$ on a $I = i$, $\mu(i) = i$, d'où $\nu_i(m, n) = (n - m + i)\,i$: on retrouve la formule du produit des corangs.

Exemple. Pour $I = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k})$, on a $\mu(1, 1, \ldots, 1) = k$, d'où $\nu_I(m, n) = (n - m + 1)k$.

En particulier, la singularité de Whitney de classe $\Sigma^{1,1}$ est pour $m = n$ de codimension 2; par conséquent, c'est une singularité non supprimable en certains points dans les applications plan sur plan, sur des courbes dans les applications $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, etc.

B. Morin a examiné les bonnes applications de classe $\Sigma^{1,1,\ldots,1,0}$ pour m, n quelconques (voir [222]). Il a constaté que ces applications sont toujours stables pour $m \geqslant \nu_I = (n - m + 1)\,k$ et se définissent complètement par leur classe. Par exemple, si $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est une bonne application, les propositions suivantes sont équivalentes:

a) $x \in \Sigma^{\overbrace{1,1,\ldots,1,0}^{n}}(f)$;

b) le germe de f en x est équivalent à celui de l'« application de Whitney généralisée » en 0:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ \ldots\ldots \\ y_{n-1} = x_{n-1}, \\ y_n = x_1 x_n + x_2 x_n^2 + \ldots + x_{n-1} x_n^{n-1} + x_n^{n+1}. \end{cases}$$

En particulier, l'application de Whitney $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ se définit par les formules $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3^4 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3$. Les ensembles Σ^1, $\Sigma^{1,1}$, $\Sigma^{1,1,1}$ pour une telle application constituent un

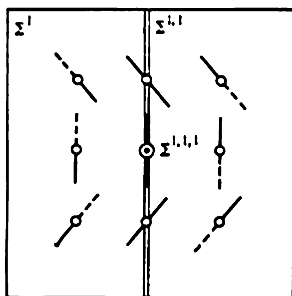


Fig. 26

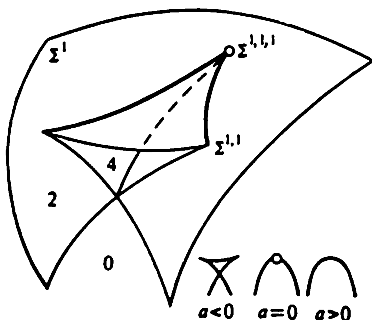


Fig. 27

drapeau (un plan, une droite, un point). Le champ des noyaux est représenté sur la figure 26 et la surface des valeurs critiques sur la figure 27. Une telle surface s'appelle *queue d'aronde*. Une queue d'aronde peut être assimilée à une surface (dans l'espace tridimensionnel) de polynômes de la forme $x^4 + ax^2 + bx + c$ constituée par les points (a, b, c), coefficients des polynômes à racines multiples. La queue d'aronde partage l'espace $\mathbf{R}^3$ des polynômes en trois parties: dans la partie en forme de pyramide le polynôme admet quatre racines réelles, dans la partie voisine, deux, et aucune dans l'espace qui reste. Par conséquent, l'application de Whitney a respectivement quatre, deux et zéro images réciproques dans les domaines limités par l'ensemble des valeurs critiques.

Pour mieux comprendre ce qu'est une queue d'aronde, il est bon d'étudier ses sections par des plans a = Cte. Si t est une racine multiple, on a $c = -t^4 - at^2 - bt$, $b = -4t^3 - 2at$. Les sections se définissent donc sous forme paramétrique $c = 3t^4 + at^2$, $b = -4t^3 - 2at$. Pour $a = 0$ la section est une parabole de degré 4/3, pour $a > 0$ c'est une courbe lisse, et pour $a < 0$ la section admet deux points de rebroussement semi-cubiques (répondant à $\Sigma^{1,1}$) et un point double.

Pour $n = 3$, toute application d'une variété de dimension n dans une variété de dimension n se laisse approcher par des applications qui n'ont d'autre singularité que celle de Whitney: Σ^1 (le pli), $\Sigma^{1,1}$ (la fronce) ou $\Sigma^{1,1,1}$ (la queue d'aronde). Il n'en est pas de même quand $n = 4$, car on a alors Σ^2.

Exemple. Pour $I = (i, j)$ on a $\mu(i, j) = i\,(1 + j) - \frac{i(j-1)}{2}$, d'où la formule de Levine:

$$\nu_{i,j}(m, n) = (n - m + i)\,i + \frac{j}{2}\left[(n - m + i)(2i - j + 1) - 2i + 2j\right].$$

En particulier, pour $m = n$

$$\nu_{i,j}(n, n) = i^2 + \frac{j}{2}\left[2i^2 - ij + 2j - i\right].$$

Il s'ensuit que pour la première fois une singularité de classe $\Sigma^{i,j}$ se manifeste comme non supprimable pour $m = n$ indiqué dans le tableau suivant:

i, j	1,0	1,1	2,0	2,1	2,2	3,0	3,1	3,2	3,3	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4
$\nu_{i,j} = n$	1	2	4	7	10	9	16	22	27	16	29	40	49	56

Exemple. Pour $m = n \leqslant 16$, les classes suivantes sont ponctuelles (pour les bonnes applications):

$n = \nu_I$	n	4	7	9	10	13	15	16
I	1_n	2	2,1	3	2,2 $2,1_2$	$2,1_3$	2, 2, 1	3,1 4 $2,1_4$

où 1_n signifie $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}$.

Définition de Σ^I d'après Boardman. Nous la donnerons en termes non invariants utilisant des systèmes de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_m$ et $y_1, \ldots, y_n$ sur M^m et N^n respectivement.

Définition. Soit B un idéal dans l'algèbre A des germes de fonctions indéfiniment différentiables $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ en 0. On appelle *extension jacobienne* $\Delta_k(B)$ un idéal engendré par B et tous les jacobiens d'ordre k: $\det\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right|$ composés de dérivées partielles des fonctions de B.

Remarque. L'extension jacobienne d'un idéal est invariante, i.e. indépendante du système de coordonnées $x_1, \ldots, x_m$. En effet, $\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}$ et le déterminant est multilinéaire.

Lemme. $\Delta_k(B)$ *décroît quand* k *augmente*:

$$\Delta_{k+1}(B) \subseteq \Delta_k(B) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Cela ressort du développement du déterminant suivant la ligne.

Définition. L'extension jacobienne $\Delta_k(B)$ est *critique* si $\Delta_k(B) \neq A$, $\Delta_{k-1}(B) = A$.

Autrement dit, pour une extension critique l'ordre des mineurs associés est le plus petit ordre pour lequel elle ne se confond pas encore avec l'algèbre tout entière.

Exemple. Soit $m = 4$, l'idéal B est engendré par x_1, x_2, x_3^2, x_4^2. Alors l'extension jacobienne critique $\Delta_3(B)$ est engendrée par x_1, x_2, x_3, x_4. Pour l'idéal obtenu $\Delta_3(B)$, l'extension jacobienne critique est la cinquième: $\Delta_5\Delta_3(B) = \Delta_3(B)$.

Exemple. Soit $m = 1$, l'idéal B est engendré par x^3. On a les extensions critiques successives

$$\Delta_1(B) = Ax^2, \quad \Delta_1\Delta_1(B) = Ax, \quad \Delta_2\Delta_1\Delta_1(B) = Ax.$$

Dans le texte qui suit, les extensions seront numérotées d'une façon plus commode.

Notation. $\Delta^k = \Delta_{m-k+1}$.

Dans l'exemple de $m = 4$ les extensions critiques s'écriront Δ^2 et $\Delta^0\Delta^2$, et dans l'exemple de $m = 1$, Δ^1, $\Delta^1\Delta^1$ et $\Delta^0\Delta^1\Delta^1$.

Soit I une suite d'entiers $i_1 \geqslant i_2 \geqslant \ldots \geqslant i_k$.

Définition. Soit un germe d'application $f: M^m \to N^n$ défini en coordonnées x, y par $y_i = f_i(x)$, $f(0) = 0$. On dit que *f admet en 0 une singularité de classe Σ^I* si les extensions jacobiennes critiques successives de l'idéal engendré par les fonctions $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$,

sont $\Delta^{i_k}\Delta^{i_{k-1}}\ldots\Delta^{i_1}$. On dit alors aussi que l'idéal en question *est de symbole* (*de Boardman*) *I*.

Exemple. L'application $y = x^3$ admet en 0 une singularité de classe $\Sigma^{1,1,0}$; l'application $y = x^{k+1}$, une singularité de classe $\Sigma^{1_k,0}$; l'application $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_1^2 - x_2^2$ et l'application $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3^2 \pm x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4$, $y_4 = x_3x_4$, une singularité $\Sigma^{2,0}$.

Remarque. Il est clair que la définition ci-dessus n'impose de restriction que sur les coefficients du développement taylorien jusqu'au degré k inclus. On vérifie sans peine que ces restrictions ne dépendent pas en fait du système de coordonnées et ne concernent que le k-jet $j_0^k(f)$. C'est l'ensemble de tous les k-jets vérifiant ces conditions qui définit l'intersection de l'ensemble $\Sigma^I \subset J^k(M, N)$ avec la fibre du fibré $J^k(M, N) \to M \times N$.

2.6. Calcul du nombre de Boardman μ (*I*). Nous allons présenter le nombre de Boardman $\mu(I)$ comme codimension d'un idéal, ainsi que comme nombre de points entiers dans un polyèdre convexe.

Soit un symbole de Boardman $I = \{i_1 \geqslant i_2 \geqslant \ldots\}$. Nous le supposerons formellement infini, en complétant la suite des i par des zéros à partir d'un i_k. Soit $m \geqslant i_1$. Associons à I un idéal $J_{I;m}$ dans l'algèbre des séries entières formelles (à coefficients complexes pour fixer les idées) de m variables $(x_1, \ldots, x_m)$ d'après la règle

$$J_{I;m} = J_{i_1,m} + J_{i_2,m}^2 + J_{i_3,m}^3 + \ldots$$

où $J_{i,m}$ est l'idéal engendré par $\{x_1, \ldots, x_{m-i}\}$.

Définition. Un idéal construit de la façon décrite est appelé *idéal de Boardman standard de symbole I* dans l'algèbre des séries de m variables

Exemple 0. Soit $I = 0$. Alors $J_{I;m}$ est l'idéal maximal constitué de séries sans terme constant.

Exemple 1. Soit $m = 1$. Alors I se présente nécessairement sous la forme $I = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k})$. Un idéal standard d'un tel symbole est $J_{0;1}^{k+1}$ et se compose de séries divisibles par x_1^{k+1}.

Exemple 2. Soit $m = 2$. Alors I se présente nécessairement sous la forme $I = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{p}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{q})$. Un idéal standard ayant un tel symbole est $J_{1;2}^{p+1} + J_{0;2}^{p+q+1}$, i.e. c'est un idéal engendré par x_1^{p+1} et par tous les monômes de degré $p + q + 1$ en x_1 et x_2.

Un tel idéal se laisse représenter facilement par le *diagramme de Newton* dans lequel le monôme $x_1^{p_1}x_2^{p_2}$ est figuré par un point entier (p_1, p_2) sur le plan (fig. 28).

L'idéal standard en question comprend les séries composées des seuls monômes à coefficient non nul dont les exposants appartiennent au domaine hachuré sur la figure 28, domaine appelé *support* de l'idéal. Un point (p_1, p_2) appartient au support si $p_1 > p$ ou si $p_1 + p_2 > p + q$. Le complémentaire du support est un polyèdre convexe. Il se définit par les inégalités $p_1 \leqslant p$, $p_1 + p_2 \leqslant p + q$ (et, bien

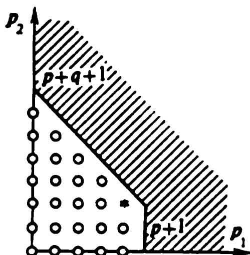


Fig. 28

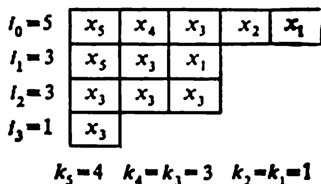


Fig. 29

sûr, par $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$). Si la série contient au moins un monôme à coefficient non nul dont l'exposant est situé dans le polyèdre indiqué, elle n'appartient pas à l'idéal standard.

Problème. Calculer le symbole de Boardman (voir p. 45) de l'idéal standard décrit.

Réponse. $(\underbrace{2, \ldots, 2}_{p}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{q})$.

Dans le cas de m variables, le diagramme de Newton se construit dans l'orthant positif du réseau d'entiers dans l'espace de dimension m. Comme dans les exemples précédents, l'idéal standard se définit par son support. Pour donner ce support, il est commode de construire, d'après le symbole I et le nombre m, un *diagramme de Young* (celui de la figure 29 est construit pour le symbole (3, 3, 1) et le nombre $m = 5$). Ce diagramme commence par une ligne zéro de longueur $i_0 = m$. Les lignes suivantes sont de longueurs i_1, i_2, . . . Dans les cases de la ligne zéro on inscrit *de droite à gauche* les variables $(x_1, \ldots, x_m)$.

Dans les cases des lignes suivantes du diagramme de Young seules peuvent être inscrites des variables x_i qui, dans la ligne zéro, ne se trouvent pas à gauche de la case à remplir. Les produits de toutes les variables figurant dans une même colonne du diagramme de Young rempli de toutes les façons possibles engendrent un idéal

standard (ce qui est visiblement équivalent à la définition précédente). Par exemple, du diagramme de Young montré sur la figure 29 on tire que dans l'idéal standard interviennent les monômes x_1, x_2, $x_1x_3^2$, $x_3^2x_4$, $x_3^2x_5^2$.

Pour donner une définition explicite du support d'un idéal standard, il est commode d'introduire en outre le symbole *de diagramme dual de Young*. Soit k_r le nombre des cases de la colonne du diagramme de Young dont la case à la ligne zéro est occupée par x_r (i.e. de la r-ième colonne de droite). Sur la figure 29 les nombres k_r sont mis sous les colonnes correspondantes. Les k_r successifs, de k_m à k_1, forment une suite non croissante. C'est le symbole du diagramme de Young dual du diagramme de Young initial (i.e. du diagramme qu'on obtient en remplaçant les lignes par les colonnes). Dans l'exemple 2 le diagramme dual est de symbole $(p + q + 1, p + 1)$, i.e. $k_1 = p + 1$, $k_2 = p + q + 1$.

Un idéal standard se laisse décrire à l'aide du symbole du diagramme dual de la façon suivante. Un point $p = (p_1, \ldots, p_m)$ appartient au support de l'idéal standard (i.e. le monôme x^p appartient à l'idéal standard) si et seulement si l'une quelconque au moins des inégalités

$$p_1 \geqslant k_1, \quad p_1 + p_2 \geqslant k_2, \quad p_1 + p_2 + p_3 \geqslant k_3, \ldots$$

est vérifiée. La série n'appartient pas à l'idéal standard si elle contient au moins un monôme x^p de coefficient non nul, tel que toutes les inégalités

$$p_1 < k_1, \quad p_1 + p_2 < k_2, \quad p_1 + p_2 + p_3 < k_3, \ldots$$

soient vérifiées.

Ce dernier système d'inégalités définit un polyèdre convexe, complémentaire du support de l'idéal standard dans l'orthant positif du diagramme de Newton. Nous l'appellerons *polyèdre standard*. Remarquons que nous rapportons au polyèdre standard les points situés sur les plans de coordonnées mais en excluons les points pour lesquels ont lieu les égalités dans les inégalités précédentes.

Proposition. *Le nombre de Boardman* $\mu(I)$ *est inférieur d'une unité au nombre des points entiers du polyèdre standard.*

Autrement dit, le nombre de Boardman est égal à la codimension de l'idéal standard dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ (i.e. dans l'idéal engendré par les séries sans terme constant).

D é m o n s t r a t i o n. Soit $I' \leqslant I$ une suite non croissante d'entiers i'_s, $s \geqslant 1$, tels que $0 \leqslant i'_s \leqslant i_s$. Alors le polyèdre standard correspondant à I' est contenu (au sens $\leqslant$) à l'intérieur du polyèdre standard correspondant à I. Réciproquement, tout polyèdre standard intérieur (non strictement) au polyèdre standard correspondant à I

correspond à un symbole $I' \leqslant I$ (tout cela parce que toute diminution du diagramme de Young se traduit par une diminution de son dual).

Considérons maintenant un point entier $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ tel que $p_1 = k_1 - 1$, $p_1 + p_2 = k_2 - 1$, $p_1 + p_2 + p_3 = k_3 - 1, \ldots$ (ce point est marqué par * sur la figure 28.) Ce point définit de façon unique le symbole $\{k_s\}$, donc aussi le diagramme de Young et son dual; soit son symbole $I' = \{i'_r\}$. Une suite I' vérifie la condition $I' \leqslant I$ si et seulement si le point p correspondant à I' appartient au polyèdre standard pour I. Le nombre des points entiers contenus dans le polyèdre standard est donc égal au nombre des suites $I' \leqslant I$. La condition $i'_1 > 0$ dans la définition du nombre de Boardman $\mu(I)$ exclut le point $p = 0$, d'où la formule cherchée:

$$\mu(I) = \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{m}/J_{I;\, m}.$$

Problème. Calculer le symbole de Boardman de l'idéal standard $J_{I;\, m}$ (voir définition p. 44).

Réponse. I.

Problème. Montrer que le symbole de Boardman d'un idéal standard change (devient plus petit) si l'on ajoute à l'idéal au moins une série qui n'en fait pas partie.

Indication. Voir 1), 2), 3) ci-après (p. 49).

Problème. Montrer que le nombre $\Sigma\,(I)$ est indépendant de m (on suppose que $m \geqslant i_1$).

2.7. Description des classes de Boardman d'après Mather. Le travail de Boardman a été plus d'une fois réexposé dans la littérature (voir [223], [206], [271]). Nous décrirons en grandes lignes la démonstration du théorème de Boardman proposée par J. Mather [206].

Désignons par δJ l'extension jacobienne maximale de l'idéal J (dans l'algèbre des séries entières formelles de m variables, à coefficients complexes pour fixer les idées).

Introduisons l'opérateur β de *boardmanisation de l'idéal*:

$$\beta J = J + (\delta J)^2 + (\delta^2 J)^3 + \ldots + (\delta^k J)^{k+1} + \ldots$$

Remarque. Dans ces notations le symbole de Boardman $I\,(J) = (i_1 \geqslant i_2 \geqslant \ldots)$ de l'idéal J s'écrit comme suit:

$$i_1 = \operatorname{corang} J, \quad i_2 = \operatorname{corang} \delta J, \;\ldots,\; i_k = \operatorname{corang} \delta^{k-1} J.$$

Par *rang* d'un idéal dans l'algèbre des séries formelles, on entend le nombre maximal de coordonnées indépendantes qu'on peut tirer des séries faisant partie de l'idéal:

$$r = \operatorname{rang} J = \dim\,(J + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2.$$

Le *corang de l'idéal* est la différence entre le nombre des variables et le rang:

$$\text{corang } J = m - r.$$

L'extension jacobienne maximale δJ de J s'écrit dans ces notations $\delta J = \Delta_{r+1} J$, $r = \text{rang } J$ (l'ordre des mineurs associés est d'une unité supérieur au rang de l'idéal).

Proposition. *Un idéal J est de symbole de Boardman I si et seulement si son boardmanisé βJ est équivalent à l'idéal standard $J_{I;m}$.*

Deux idéaux dans l'algèbre des séries formelles sont dits *équivalents* si un idéal se transforme dans l'autre par un changement (formel) de variables.

La d é m o n s t r a t i o n de la proposition est fondée sur trois résultats faciles à vérifier:

1) $\delta\beta = \beta\delta$, $\beta^2 = \beta$;

2) $I(\beta J) = I(J)$;

3) $\beta J = J$ si et seulement si l'idéal J est équivalent à l'idéal standard $J_{I(J);m}$.

Pour les détails de la démonstration, voir le travail de Mather cité.

Soit un symbole de Boardman I à k éléments $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ (i.e. $i_{k+1} = \ldots = 0$). On peut alors remplacer, partout dans le texte qui précède, l'algèbre des séries entières formelles par l'algèbre des k-jets $\mathbf{C}\,[[x_1, \ldots, x_m]]/\mathfrak{m}^{k+1}$.

Considérons l'espace des k-jets des applications de $\mathbf{C}^m$ dans $\mathbf{C}^n$ qui appliquent 0 dans 0. Dans cet espace, définissons pour chaque symbole de Boardman I une *variété de Boardman* Σ^I: c'est l'ensemble des jets d'applications pour lesquels le symbole de Boardman de l'idéal construit à partir des composantes de l'application (i.e à partir des n fonctions de m variables définissant l'application) est égal à I.

Chaque idéal de symbole de Boardman I se transforme par boardmanisation en un idéal équivalent à l'idéal standard de symbole I. Associons à chaque k-jet d'application de Σ^I l'idéal équivalent à l'idéal standard obtenu par boardmanisation à partir de l'idéal construit sur les composantes du jet. L'application obtenue est une fibration différentiable. Désignons par U la base du fibré, i.e. l'ensemble de tous les idéaux équivalents à l'idéal standard de symbole I dans l'algèbre des k-jets.

Chaque fibre du fibré construit $\Sigma^I \to U$ est la variété des k-jets d'applications qui définissent les idéaux dont tout boardmanisé est un idéal fixe équivalent à l'idéal standard. En particulier, la fibre au-dessus de l'idéal standard est la variété de tous les k-jets d'applications qui engendrent par boardmanisation l'idéal standard. Désignons cette fibre par V.

La codimension de la variété de Boardman Σ^I dans l'espace des k-jets envoyant 0 *sur* 0 *est égale à la codimension de la variété V des k-jets d'applications engendrant par boardmanisation l'idéal standard, diminuée de la dimension de la variété U de tous les idéaux équivalents à l'idéal standard*:

$$\operatorname{codim} \Sigma^I = \operatorname{codim} V - \dim U.$$

Le minuende et le nombre à soustraire se calculent séparément.

La condition nécessaire et presque suffisante pour qu'un k-jet définisse par boardmanisation un idéal standard de symbole I est que les supports de toutes les composantes appartiennent à celui de l'idéal standard. Le mot « presque » veut dire que si les supports des composantes appartiennent à celui de l'idéal standard, alors l'idéal construit sur ces composantes est de symbole de Boardman donné I pour presque toute famille de coefficients des composantes [« presque toute » signifie « n'appartenant pas à une hypersurface dans l'espace des familles de coefficients »; on suppose en outre que $n \geqslant m - i_1$ et que pour $n = m - i_1$ on a aussi $i_2 = \ldots = i_k = 0$ (si cette condition n'est pas respectée, Σ^I est vide)].

Il ressort de ce qui précède que la codimension de la variété V des jets qui définissent un idéal standard de symbole de Boardman I dans la variété de tous les k-jets d'applications différentiables de $\mathbf{C}^m$ dans $\mathbf{C}^n$ envoyant 0 sur 0 est n fois plus grande que la codimension de l'idéal standard dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}$:

$$\operatorname{codim} V = n \dim \mathfrak{m}/J_{I;m} = n\mu(I).$$

Pour calculer la dimension de la variété de tous les idéaux équivalents à un idéal standard, considérons l'action canonique du groupe des k-jets de difféomorphismes de l'espace $\mathbf{C}^m$ laissant 0 invariant sur l'ensemble des idéaux de l'algèbre des k-jets. Considérons le sous-groupe formé des jets de difféomorphismes qui renvoient à lui-même l'idéal standard de symbole de Boardman I dans l'algèbre des k-jets, i.e. le stabilisateur de l'idéal standard. Ce sous-groupe du groupe des k-jets de difféomorphismes de $(\mathbf{C}^m, 0)$ dans lui-même sera désigné par H.

La dimension de la variété U de tous les idéaux équivalents à l'idéal standard est égale à la codimension du sous-groupe H dans le groupe de tous les k-jets de difféomorphismes.

Il reste donc à calculer le nombre des restrictions imposées aux composantes d'un difféomorphisme par la condition de conservation de l'idéal standard de symbole de Boardman I.

Il est commode de faire ce calcul à l'aide du diagramme de Young (fig. 29). Rappelons que nous avions désigné par k_s la longueur de la colonne x_s du diagramme, i.e. la longueur de la colonne dont la case supérieure (celle de la ligne zéro) est occupée par x_s.

Déterminons pour chaque variable x_s le *diagramme tronqué au niveau de x_s*: on l'obtient à partir du diagramme de Young initial en éliminant toutes les lignes qui coupent la colonne x_s, sauf la ligne zéro (leur nombre est $k_s - 1$). En termes du symbole de Boardman, la troncature au niveau de x_s signifie l'élimination des $k_s - 1$ premiers éléments du symbole: $i_1, \ldots, i_{k_s-1}$. Tous les diagrammes tronqués obtenus à partir du diagramme de la figure 29 sont montrés sur la figure 30.

$s = 1, 2$, $k_s = 1$

x_5	x_4	x_3	x_2	x_1

$s = 3, 4$, $k_s = 3$

x_5	x_4	x_3	x_2	x_1

$s = 5$, $k_s = 4$

x_5	x_4	x_3	x_2	x_1

Fig. 30

Proposition. *Pour qu'un difféomorphisme applique un idéal standard dans lui-même, la condition nécessaire et presque suffisante est qu'il transforme chaque fonction coordonnée x_s en une fonction appartenant à l'idéal standard correspondant au diagramme tronqué au niveau de x_s.*

Les restrictions imposées au difféomorphisme par cette proposition peuvent s'écrire sous la forme

$$g^* x_s \in J_{S^{k_s-1}I},$$

où S est l'opérateur d'élimination du premier élément du symbole.

Par exemple, pour le diagramme $(\underbrace{2, \ldots, 2}_{p}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{q})$ à deux variables ($m = 2$) les restrictions sont les suivantes: l'image de x_1 appartient à l'idéal construit sur x_1 et x_2^{q+1}, et l'image de x_2, à l'idéal construit sur x_1 et x_2 (i.e. à l'idéal maximal). Pour les détails de la démonstration, voir [206].

De la dernière proposition il ressort que la codimension du stabilisateur de l'idéal standard de symbole de Boardman I est égale à la somme des codimensions des idéaux standards qui correspondent aux troncatures des diagrammes de Young au niveau de $x_1, x_2, \ldots$ Ainsi donc,

$$\dim U = \operatorname{codim} H = (i_0 - i_1)\,\mu(I) + (i_1 - i_2)\,\mu(SI) + \\ + (i_2 - i_3)\,\mu(S^2 I) + \ldots$$

(S est l'opérateur d'élimination du premier élément du symbole; le diagramme tronqué reste invariable le long de chaque palier du diagramme de Young, aussi un terme $\mu(S^r I)$ intervient-il exactement $i_r - i_{r+1}$ fois, la longueur du palier correspondant).

Cette formule, conjointement avec la formule déduite plus haut pour la codimension de la variété V de tous les k-jets d'applications définissant un idéal standard, nous conduit finalement à la formule de Boardman:

$$\operatorname{codim} \Sigma^I = \operatorname{codim} V - \dim U = (n - i_0 + i_1)\, \mu(I) - \\ - (i_1 - i_2)\, \mu(SI) - (i_2 - i_3)\, \mu(S^2 I) - \ldots$$

Remarque. Nous voyons que les classes de Boardman sont étroitement liées à des polyèdres convexes spéciaux du diagramme de Newton (les polyèdres standards). Considérons sur le diagramme de Newton un polyèdre convexe défini par un système d'inégalités linéaires non homogènes à coefficients entiers non négatifs λ. Un tel polyèdre contient 0 si toutes les inégalités sont de la forme $(\lambda, p) < \lambda_0$, ou tourne sa convexité vers 0 si toutes les inégalités sont de la forme $(\lambda, p) \geqslant \lambda_0$. Dans le premier cas (compact) nous considérerons l'idéal dont le support est le complémentaire du polyèdre, et dans le second cas, le polyèdre (non compact) lui-même. Dans le premier cas comme dans le second, nous pouvons associer au polyèdre une classe d'applications, à savoir la classe de toutes les applications pour lesquelles, quitte à choisir convenablement un système de coordonnées, l'idéal engendré par les composantes de l'application est contenu dans l'idéal construit à partir du polyèdre. Il serait intéressant d'étudier les classes de singularités correspondantes.

§ 3. Différentielle quadratique d'une singularité

Le rang de la différentielle première f_x conduit aux classes de singularités Σ^i. L'étude de la partie quadratique de l'application permet une classification plus précise: à chaque singularité on fait correspondre une famille linéaire de formes quadratiques liée intrinsèquement à cette singularité.

3.1. Définition de la différentielle quadratique. La différentielle seconde n'est invariante que sur le noyau de la première et seulement à l'image de la première près. On appelle donc *différentielle quadratique* d'une application $f: M^m \to N^m$ en un point $x \in M^m$ l'application quadratique *) d'espaces vectoriels

$$f_{xx}: \operatorname{Ker} f_x \to \operatorname{Coker} f_x,$$

où $\operatorname{Ker} f_x \subset TM$ est le noyau de la différentielle première $f_x: T_x M \to T_{f(x)} N$ et $\operatorname{Coker} f_x = T_{f(x)} N / f_x T_x M$ son conoyau.

*) Une application d'espaces vectoriels $\alpha: A \to B$ est *quadratique* s'il existe une application bilinéaire symétrique $\alpha': A + A \to B$ telle que $\alpha = \alpha' \circ \Delta$, où Δ est l'application diagonale $\Delta: A \to A + A$, $\Delta(x) = (x, x)$.

Définissons d'abord l'application f_{xx} au moyen de coordonnées locales :

$$X\colon T_xM^m \to M^m, \quad Y\colon T_{f(x)}N^n \to N^n,$$

où

$$X(0)=x, \quad Y(0)=f(x), \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X(\xi t)=\xi, \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y(\xi t)=\xi.$$

Dans ces coordonnées l'application f s'écrit

$$\varphi\colon T_xM \to T_{f(x)}N, \quad \text{où} \quad \varphi = Y^{-1}\circ f\circ X.$$

Définition. La *valeur de la différentielle quadratique* f_{xx} sur $\xi \in \operatorname{Ker} f_x$ est

$$f_{xx}(\xi)=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t\xi)}{t^2}\Big/ f_*T_xM \in \operatorname{Coker} f_x.$$

Lemme. *La différentielle quadratique f_{xx} est indépendante du choix des coordonnées locales X, Y.*

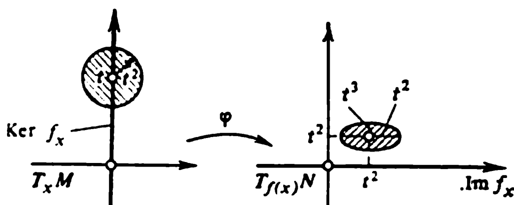


Fig. 31

La démonstration ressort immédiatement de la formule de Taylor (fig. 31) :

$$\varphi(\eta)=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big|_0\eta+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\Big|_0\eta,\ \eta\right)+O(\eta^3).$$

Si $\eta\in\operatorname{Ker} f_x = O(t)$, $\zeta=O(t^2)$, alors

$$\varphi(\eta+\zeta)=$$

$$=f_x(\eta+\zeta)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\Big|_0\eta,\ \eta\right)+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\Big|_0\eta,\ \zeta\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\Big|_0\zeta,\ \zeta\right)+\ldots=$$

$$=f_x\zeta+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\Big|_0\eta,\ \eta\right)+O(t^3).$$

C.Q.F.D.

On démontre en même temps que dans le système local où $\eta_1,\ldots,\eta_k$ sont les coordonnées $\eta\in\operatorname{Ker} f_x$ et $\varphi_1,\ldots,\varphi_l$, les coordonnées dans Coker f_x, la différentielle quadratique se définit par la

formule

$$(f_{xx}(\eta))_l = \frac{1}{2} \sum_{j,\,k} \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial \xi_j \, \partial \xi_k} \eta_j \eta_k.$$

Exemple. Pour l'application à singularité non supprimable $\Sigma^{2,0}$ (exemple du § 2, p. 41) la différentielle quadratique se définit par les formules $f_{xx}: (x_3, x_4) \mapsto (x_3^2 \pm x_4^2, x_3 x_4)$.

Remarque. La différentielle cubique ne se laisse pas définir, elle, par la construction décrite. Les différentielles supérieures invariantes peuvent être obtenues par itération de la construction suivante de la « dérivée interne » de Porteous.

3.2. Dérivée interne. Soient deux fibrés vectoriels de base commune B, et soit A une application de ces fibrés. La *dérivée interne* ∂ de A en un point b de B est un opérateur linéaire

$$\partial A : T_b B \to \text{Hom}\,(\text{Ker}\, A\,|_b\,,\ \text{Coker}\, A\,|_b\,)$$

qui se définit comme suit.

Au voisinage de tout point de la base les fibrés sont des produits directs, si bien qu'on peut fixer les systèmes de coordonnées dans les fibres. L'application A se définit alors par une famille d'opérateurs linéaires A_x qui opèrent tous de l'espace de la fibre type X du premier fibré dans l'espace de la fibre type Y du second ; le paramètre x appartient à la base du fibré. On fixe également un système de coordonnées d'origine $b \in B$ et l'on assimile le point x de B à un vecteur d'espace vectoriel. Soit ξ un vecteur de X. Le développement taylorien du vecteur $A_x\xi$ suivant x commence par les termes

$$A_x\xi = A_0\xi + D\,(x)\,\xi + \ldots,$$

où D dépend linéairement de x; $D(x)$ est un opérateur linéaire de X dans Y. Désignons par $i: \text{Ker}\, A_0 \to X$ le plongement du noyau de l'opérateur A_0 dans l'espace source et par $\pi: Y \to \text{Coker}\, A_0$ la projection de l'espace but Y suivant A_0X sur l'espace quotient Y/A_0X. La valeur de la dérivée interne sur le vecteur x de T_0B se définit comme un opérateur linéaire du noyau dans le conoyau de l'application A_0, à savoir:

$$\partial A\,(x) = \pi \circ D\,(x) \circ i : \text{Ker}\, A_0 \to \text{Coker}\, A_0.$$

Il est évident que cet opérateur dépend linéairement de x. Il est tout aussi clair qu'il ne dépend pas du choix du système de coordonnées sur la base.

3.3. La dérivée interne est invariante. Montrons que l'opérateur ainsi construit ne dépend pas des systèmes de coordonnées dont on munit les fibres. En effet, introduisons de nouvelles coordonnées $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$

dans les fibres, telles que

$$\tilde{\xi} = P(x)\,\xi, \qquad \tilde{\eta} = Q(x)\,\eta$$

($P(x)$ et $Q(x)$ sont des opérateurs linéaires de X dans X et de Y dans Y respectivement, qui dépendent différentiablement du point x de la base). Dans les nouvelles coordonnées l'application initiale $\eta = A(x)\,\xi$ devient $\tilde{\eta} = \tilde{A}(x)\,\tilde{\xi}$, où $\tilde{A}(x) = Q(x)\,A(x)\,P(x)$. Dérivons par rapport à x en $x = 0$; il vient

$$\frac{d\tilde{A}}{dx} = \frac{dQ}{dx} AP + Q\frac{dA}{dx} P + QA\frac{dP}{dx}.$$

Le premier terme s'annule sur le noyau de $\tilde{A}_0$ et le troisième appartient à l'image de $\tilde{A}_0$. Désignant par $\tilde{i}$ et $\tilde{\pi}$ respectivement le plongement et la projection de Ker $\tilde{A}_0$ dans son conoyau, on écrira la dérivée interne en nouvelles coordonnées comme suit:

$$\partial\tilde{A}(x) = \tilde{\pi} \circ \tilde{D}(x) \circ \tilde{i} = \tilde{\pi} \circ Q \circ D(x) \circ P \circ \tilde{i} =$$
$$= Q \circ \pi \circ D(x) \circ i \circ P = Q \circ \partial A(x) \circ P,$$

ce qui montre que l'opérateur linéaire $\partial A(x)$ est bien indépendant du choix des systèmes de coordonnées.

3.4. Fibré vertical d'une application. Dans le cas de la dérivée d'une application différentiable $f\colon M \to N$, les résultats précédents s'énoncent comme suit. La dérivée définit une application de fibrés vectoriels $f_{*(x)}\colon T_xM \to T_{fx}N$ de bases *différentes*. Pour revenir à une base commune, associons à f un nouveau fibré, dit *fibré vertical* de f. Il s'avère souvent très utile au cours des opérations sur f. Le fibré vertical se définit comme suit.

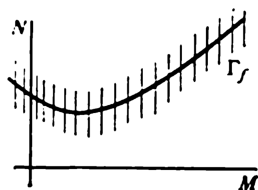


Fig. 32

Considérons le graphe Γ_f de l'application $f\colon M \to N$ (fig. 32). Γ_f est une sous-variété du produit direct $M \times N$, qui peut être assimilé à un fibré de base M. Le graphe est une section de ce fibré: sa projection sur M parallèle à N est un difféomorphisme $\Gamma_f \to M$. Les fibres parallèles à N sont transversales au graphe. Les espaces tangents aux fibres dans tous les points du graphe forment le fibré vertical de l'application f. Identifiant le graphe Γ_f à la variété source M au moyen de la projection naturelle, on peut assimiler le fibré vertical à un fibré de base M. On est alors en droit de dire que *le fibré vertical d'une application $f\colon M \to N$ est un fibré dont la fibre au-dessus d'un point x de M est l'espace $T_{f(x)}N$ tangent à N en $f(x)$.*

Le fibré vertical de f se note f^*TN.

La dérivée de f définit une application naturelle de fibré tangent à la variété source dans le fibré vertical : à tout vecteur ξ de T_xM elle associe un vecteur $f_{*x}\,\xi$ de la fibre $T_{f(x)}N$ du fibré vertical. La dérivée interne de cette application de fibré définit une application bilinéaire $\delta : T_xM \times \operatorname{Ker} f_{*x} \to \operatorname{Coker} f_{*x}$. Cette application bilinéaire, définie intrinsèquement par l'application différentiable f, est plus informative que la différentielle quadratique. Cette dernière s'obtient en faisant la restriction de δ à la « diagonale » :

$$\delta(\xi, \xi) = 2f_{xx}(\xi), \quad \xi \in \operatorname{Ker} f_{*x}.$$

3.5. Famille de formes quadratiques associée à la différentielle quadratique. A la différentielle quadratique f_{xx} est liée intrinsèquement une famille L de formes quadratiques. Soient F l'espace vectoriel des formes quadratiques réelles sur $\operatorname{Ker} f_x$, et C' l'espace dual de $\operatorname{Coker} f_x$. A toute forme

$$\alpha : \operatorname{Coker} f_x \to \mathbf{R}^1, \quad \alpha \in C',$$

correspond une forme quadratique $\alpha \circ f_{xx} \in F$.

Définition. On appelle *famille de formes quadratiques L associée à f_{xx}* l'application linéaire du co-conoyau de f_x dans l'espace des formes quadratiques sur le noyau de f_x :

$$L : C' \to F$$

définie par la formule $L(\alpha) = \alpha \circ f_{xx}$.

Exemple. Soient $\operatorname{Ker} f_x$ et $\operatorname{Coker} f_x$ de dimension 2.

L'espace F des formes quadratiques de deux variables est de dimension 3, et la famille L est une application du plan C' de dimension 2 dans l'espace F de dimension 3.

On peut munir l'espace des formes quadratiques F d'une structure supplémentaire en faisant la classification des formes suivant les indices d'inertie. Soient x_1, x_2 les coordonnées sur $\operatorname{Ker} f_x$. Munissons F de coordonnées a, b, c; un point de coordonnées a, b, c n'est autre qu'une forme

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

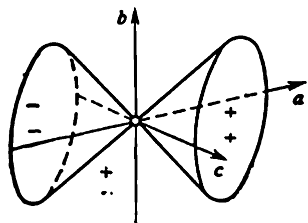


Fig. 33

Le lieu des formes de rang 1 (paraboliques) dans F est un cône $b^2 = ac$ (fig. 33). Le sommet du cône est une forme nulle. L'intérieur des deux nappes du cône est constitué de formes elliptiques des types $(+, +)$ et $(-, -)$, et leur extérieur, de formes hyperboliques du type $(+, -)$.

La famille L est un sous-espace $L(C') \subset F$, qui peut être situé dans F de sept manières différentes:

1. Un plan entièrement extérieur au cône (toutes les formes du faisceau sont hyperboliques). Exemple: $\alpha_1(x_1^2 - x_2^2) + \alpha_2 x_1 x_2$.

2. Un plan qui coupe le cône (le faisceau contient deux formes paraboliques). Exemple: $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$.

3. Un plan tangent au cône (le faisceau contient une forme parabolique). Exemple: $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_1 x_2$.

4. Une droite passant à l'intérieur du cône. Exemple: $\alpha_1(x_1^2 + x_2^2) + \alpha_2 \cdot 0$.

5. Une droite passant à l'extérieur du cône. Exemple: $\alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 \cdot 0$.

6. Une droite tangente au cône. Exemple: $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 \cdot 0$.

7. Le point $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0$.

Il se trouve que la situation du sous-espace représentatif de L est un invariant de la singularité.

Notations. Soit $F(\mathbf{R}^k)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques de k variables. Soit

$$H(c, k) = \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^c, F(\mathbf{R}^k))$$

l'espace vectoriel des familles linéaires c-paramétriques de formes quadratiques de k variables.

Le groupe $\mathrm{GL}(c, \mathbf{R}) \times \mathrm{GL}(k, \mathbf{R})$ des transformations linéaires de $\mathbf{R}^c$ et $\mathbf{R}^k$ opère naturellement sur $H(c, k)$ d'après la formule

$$[(g_c \times g_k)L](\xi_c)\,\xi_k = L(g_c^{-1}\xi_c)g_k^{-1}\xi_k,$$

$$\xi_c \in \mathbf{R}^c, \quad \xi_k \in \mathbf{R}^k, \quad g_c \in \mathrm{GL}(c, \mathbf{R}), \quad g_k \in \mathrm{GL}(k, \mathbf{R}).$$

Exemple. L'espace $H(2, 2)$ est de dimension 6; sous l'action du groupe $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R}) \times \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ il se décompose en les sept orbites de l'exemple précédent.

Rappelons maintenant qu'à tout germe d'application $f: M \to N$ en un point $x \in M$ nous avons associé une différentielle quadratique f_{xx}, et à cette dernière une famille de formes quadratiques

$$L_f \in \mathrm{Hom}(C', F(K)), \quad C' = \mathrm{Coker}\, f_x, \quad K = \mathrm{Ker}\, f_x.$$

Choisissant les identifications

$$C' \approx \mathbf{R}^c, \quad c = \dim \mathrm{Coker}\, f_x, \quad K \approx \mathbf{R}^k, \quad k = \dim \mathrm{Ker}\, f_x,$$

on associe à la famille L_f un élément de $H(c, k)$. Diverses identifications d'espaces vectoriels s'obtiennent par l'action du groupe $\mathrm{GL}(c, \mathbf{R}) \times \mathrm{GL}(k, \mathbf{R})$ sur $H(c, k)$ décrite ci-dessus. Nous avons donc démontré le

Lemme. *La construction décrite associe à tout germe d'application $f: M \to N$ en x intrinsèquement (par difféomorphismes de M et N)*

une orbite d'action du groupe GL $(c, \mathbf{R}) \times$ GL $(k, \mathbf{R})$ *dans l'espace de toutes les familles c-paramétriques de formes quadratiques de k variables* $H(c, k)$, *où* $c = \dim \operatorname{Coker} f_x$ *et* $k = \dim \operatorname{Ker} f_x$.

3.6. Singularités Σ^2 elliptiques et hyperboliques. Du lemme précédent découle le

Corollaire. *Soient deux applications* $f_\pm : \mathbf{R}_1^4 \to \mathbf{R}_2^4$ *définies par les formules*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^2 \pm x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4 \\ x_3x_4 \end{pmatrix}$$

Leurs germes en 0 *ne sont pas équivalents, i.e. il n'existe pas de germes de difféomorphismes* h, k, $h(0) = 0$, $k(0) = 0$, *tels que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f_+} & \mathbf{R}^n \\ h\downarrow & & \downarrow k \\ \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f_-} & \mathbf{R}^n \end{array}$$

soit commutatif.

D é m o n s t r a t i o n. Dans ce cas $c = k = 2$, et l'on retrouve l'espace $H(2, 2)$ de l'exemple précédent. La famille $L_\pm$ se définit par les formules

$$\alpha_1 (x_3^2 \pm x_4^2) + \alpha_2 x_3 x_4$$

et définit un plan dans l'espace (a, b, c). Pour f_- ce plan est extérieur au cône, donc à f_- correspond la première des sept orbites de l'exemple. Pour f_+ le plan coupe le cône et f_+ se traduit par la deuxième des sept orbites. Les orbites sont différentes, d'où il découle que les germes do f_+ et f_- en 0 sont non équivalents, e qu'il fallait démontrer.

Remarque 1. On vérifie sans peine que les $f_\pm$ admettent en 0 une singularité non supprimable de classe Σ^2. Ainsi donc, la classification suivant les classes de Boardman Σ^I est incomplète. La singularité de f_- s'appelle *singularité elliptique* de classe Σ^2, et celle de f_+, *singularité hyperbolique*. (Pourquoi?)

Remarque 2. On vérifie sans peine que les applications elliptique f_- et hyperbolique f_+ en 0 sont différentes non seulement différentiablement mais aussi topologiquement. Pour mieux comprendre leur structure, on peut les assimiler à des applications plan sur plan

$$\begin{cases} x_3 \\ x_4 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x_3^2 \pm x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4, \\ x_3x_4 \end{cases}$$

dépendant des paramètres x_1, x_2. Pour $x_1 = x_2 = 0$ on obtient soit une application complexe $z \mapsto z^2$ (f_-), soit un « coin » (f_+) équivalent à l'application

$$\begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases} \mapsto \begin{cases} u_1^2 \\ u_2^2 \end{cases} = \begin{cases} v_1, \\ v_2 \end{cases}$$

(voir fig. 34). Cela suffit pour s'assurer que les applications f_+, f_- sont topologiquement non équivalentes: l'image de f_- recouvre $\mathbf{R}^4$ et celle de f_+ non.

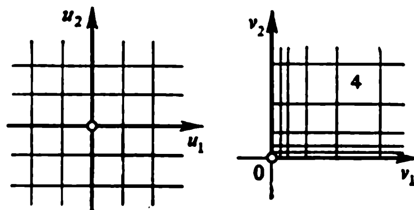


Fig. 34

Pour x_1, x_2 petits on a une application proche dont la structure est ou bien celle de la figure 17, p. 22 (cas de (f_-)), ou bien celle de la figure 18, p. 23 (cas de (f_+)).

Remarque 3. Il sera montré plus tard que les germes des deux applications $f_\pm$ sont stables. On montre également que toute application $M^4 \to N^4$ se laisse approcher par une application dont le germe en tout point est équivalent à l'un des sept germes stables définis par les formules

Σ^0: $y_i = x_i$, $i = 1, \ldots, 4$,

$\Sigma^{1,0}$: $y_i = x_i$, $i = 1, \ldots, 3$, $y_4 = x_4^2$,

$\Sigma^{1,1,0}$: $y_i = x_i$, $i = 1, \ldots, 3$, $y_4 = x_1x_4 + x_4^3$,

$\Sigma^{1,1,1,0}$: $y_i = x_i$, $i = 1, \ldots, 3$, $y_4 = x_1x_4 + x_2x_4^2 + x_4^4$,

$\Sigma^{1,1,1,1,0}$: $y_i = x_i$, $i = 1, \ldots, 3$, $y_4 = x_1x_4 + x_2x_4^2 + x_3x_4^3 + x_4^5$,

$f_+ = \Sigma_+^{2,0}$: $y_i = x_i$, $i \leqslant 2$, $y_3 = x_3^2 + x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4$, $y_4 = x_3x_4$,

$f_- = \Sigma_-^{2,0}$: $y_i = x_i$, $i \leqslant 2$, $y_3 = x_3^2 - x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4$, $y_4 = x_3x_4$.

3.7. Existence d'applications instables non supprimables. Le lemme précédent a encore un corollaire.

Théorème (Thom [273]). *L'ensemble des applications stables $M^{n^2} \to N^{n^2}$ n'est pas partout dense dans l'espace des applications différentiables $M^{n^2} \to N^{n^2}$ pour $n \geqslant 3$.*

La démonstration est basée sur la remarque suivante.

Lemme. *Toute orbite de* GL $(n, \mathbf{R}) \times$ GL $(n, \mathbf{R})$ *dans l'espace des familles n-paramétriques de formes quadratiques à n variables* $H(n, n)$ *est de codimension strictement positive pour* $n \geqslant 3$.

Démonstration. De toute évidence

$$\dim H(n, n) = \frac{n^2(n+1)}{2},$$

$$\dim \mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) = 2n^2.$$

Il existe un sous-groupe de dimension 1 (des scalaires) qui laisse invariants tous les points de H. La codimension de toute orbite est donc non inférieure à

$$\frac{n^2(n+1)}{2} - (2n^2 - 1) \geqslant 1, \quad n \geqslant 3.$$

Le lemme est démontré.

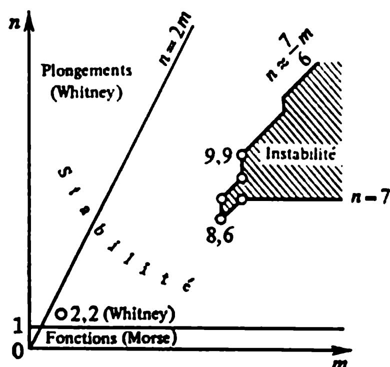


Fig. 35

Considérons maintenant une application $f: M^{n^2} \to N^{n^2}$ qui admet en 0 une singularité transversale du type Σ^n. D'après la formule du produit des corangs, la singularité $\Sigma^n(f)$ est de codimension n^2, et toute application proche admettra en un point voisin de 0 une singularité du type Σ^n.

Considérons la différentielle quadratique f_{xx} en 0 ainsi que l'orbite qui lui correspond dans $H(n, n)$. Puisque cette orbite est de codimension $\geqslant 1$, il existe dans un voisinage quelconque de f des applications $\tilde{f}$ dont les différentielles quadratiques en un point de $\Sigma^n(\tilde{f})$ correspondent à des orbites *différentes* (de telles applications $\tilde{f}$ sont faciles à construire: il suffit de varier dans f le jet d'ordre 2).

Par conséquent, le germe de toute application $f: M^{n^2} \to N^{n^2}$ en $0 \in \Sigma^n(f)$ est instable, ce qui démontre le théorème.

Remarque 1. En termes de la figure 35, nous avons démontré que le point $m = n = 9$ appartient à un domaine d'instabilité (dit *domaine des mauvaises dimensions de Mather*).

Remarque 2. Le théorème ci-dessus revient à dire que les singularités différentiables d'applications $M^{n^2} \to N^{n^2}$ admettent pour n grands des « modules » (i.e. des invariants par rapport aux difféomorphismes qui varient de façon continue avec l'application). Par exemple, de la démonstration précédente il découle que pour $n \geqslant 3$ on a au moins un module.

Pour un n suffisamment élevé le nombre des modules devient infini ; autrement dit, l'espace des singularités non équivalentes différentiablement est de dimension infinie. En effet, pour des n suffisamment grands, dans l'espace source existent des sous-variétés des singularités non supprimables de type courbe (surface, . . .) en chaque point desquelles les jets de l'application admettent des modules. Il y a plus : en augmentant n, on aboutit inévitablement à la situation où le nombre des modules devient plus grand que la dimension de la sous-variété (courbe, surface, . . .) sous-jacente. En pareil cas la famille des modules définit une application de la sous-variété indiquée de l'espace source dans l'espace des valeurs des modules. L'image par cette application est un sous-ensemble (courbe, surface, . . .) dans l'espace des valeurs des modules. Ce sous-ensemble est un invariant de l'application initiale. Nous obtenons donc comme invariant d'applications différentiables une courbe (surface, . . .). On peut dire que pour des n suffisamment grands les modules eux-mêmes deviennent fonctionnels. Il serait intéressant de formuler des théorèmes correspondants sur le comportement asymptotique du nombre des modules dans l'espace des k-jets pour k arbitraire.

Pour les applications $M^m \to N^n$ avec m, n arbitraires, la situation se présente d'une façon analogue, à ceci près que m doit augmenter avec n : on s'avance ainsi dans le domaine des mauvaises dimensions de Mather hachuré sur la figure 35. La frontière des modules fonctionnels dans le plan de (m, n) a été récemment calculée par C.T.C. Wall. Il reste à trouver les frontières des modules en forme de fonctions de r variables, pour chaque r.

§ 4. Algèbre locale d'une singularité et théorème de préparation de Weierstrass

Tout objet géométrique peut être décrit de deux façons : en termes de points de variétés et en termes de fonctions sur des variétés. Là où le géomètre parle variété, l'algébriste préfère parler algèbre de fonctions (sur cette variété). A la notion de sous-variété répond celle d'idéal (formé de fonctions s'annulant sur la sous-variété en question). On obtient l'algèbre des fonctions sur la sous-variété au départ de l'algèbre des fonctions sur la variété initiale par passage au quotient par l'idéal. Les points d'une variété sont des sous-variétés minimales, auxquelles correspondent des idéaux maximaux, et ainsi de suite.

La description algébrique s'avère particulièrement avantageuse dans le cas de dégénérescence, quand les objets géométriques sont microscopiques et se prêtent difficilement à une étude directe.

En particulier, à chaque singularité d'une application différentiable en un point est associée une algèbre locale : « l'algèbre des fonctions sur l'image réciproque infinitésimale du point ». Pour ex-

pliciter la définition de cette algèbre, commençons par un exemple très simple.

4.1. Algèbre des fonctions sur une paire de points infiniment proches. Considérons l'application de la droite numérique sur une droite, définie par la formule $y = x^2$ (fig. 36). Fixons une valeur non singulière $y = \varepsilon$. Elle est image de deux points. Considérons l'algèbre de toutes les fonctions sur l'ensemble constitué par ces deux points, ou paire de points. Cette R-algèbre (algèbre sur le corps commutatif R) est un espace vectoriel fonctionnel de dimension 2 (puisque la fonction se définit par ses valeurs en deux points) muni de l'opération de multiplication (point par point) de fonctions. Notons Q_ε l'algèbre des fonctions sur les images réciproques du point ε.

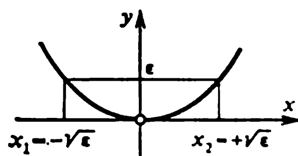


Fig. 36

L'espace vectoriel de Q_ε admet une base canonique de δ-fonctions:

$$\delta_1 = \begin{cases} 1 \text{ pour } x = \sqrt{\varepsilon}, \\ 0 \text{ pour } x = -\sqrt{\varepsilon}; \end{cases} \qquad \delta_2 = \begin{cases} 0 \text{ pour } x = \sqrt{\varepsilon}, \\ 1 \text{ pour } x = -\sqrt{\varepsilon}. \end{cases}$$

Cependant elle est peu commode pour étudier le passage à la limite pour $\varepsilon \to 0$. Introduisons dans Q_ε une autre base en faisant la restriction des polynômes élémentaires de degré inférieur à 2 en x à notre paire de points:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = x.$$

La table de multiplication de Q_ε dans la seconde base est

	1	x
1	1	x
x	x	ε

Faisons tendre ε vers zéro. Alors l'opération définie par l'algèbre (multiplication dans l'espace de dimension 2 des polynômes de degré inférieur à 2) passe à la limite à une opération (dans le même espace vectoriel) définie par la table de multiplication

	1	x
1	1	x
x	x	0

L'espace des polynômes de degré inférieur à 2 muni de l'opération indiquée est une algèbre, dite *algèbre des fonctions sur une paire de points infiniment proches*, $Q = \lim_{\varepsilon \to 0} Q_\varepsilon$.

Cette algèbre peut également être présentée sous forme d'algèbre quotient $Q = \mathbf{R}\,[[x]]/(x^2)$ de l'algèbre $\mathbf{R}\,[[x]]$ des séries entières formelles de x par l'idéal engendré par x^2. Au lieu de l'algèbre des séries, on peut aussi prendre l'algèbre des polynômes $\mathbf{R}\,[x]$. C'est la raison pour laquelle l'algèbre Q des fonctions sur une paire de points infiniment proches s'appelle aussi *algèbre des polynômes tronqués de degré inférieur à* 2.

Dans le cas d'une application différentiable arbitraire, on se trouve dans une situation plus générale d'algèbre des fonctions sur l'image réciproque infinitésimale d'un point.

4.2. Algèbre locale d'une application en un point. Soit $f: (\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ une application différentiable définie au voisinage du point 0 de $\mathbf{R}^m$ qui l'envoie en le point 0 de $\mathbf{R}^n$. En coordonnées, f se définit par n fonctions de m variables:

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m).$$

Afin de couvrir toutes les variantes possibles qui peuvent se présenter selon la classe de différentiabilité, nous introduisons une notation unique A_x (A comme algèbre) pour la « $\mathbf{R}$-algèbre des fonctions de classe donnée » de x. A_x peut prendre comme valeurs par exemple:

$\mathscr{E}_x$, algèbre des germes de fonctions indéfiniment différentiables en 0;

H_x, algèbre des séries entières convergentes;

$\mathbf{R}\,[[x]]$, algèbre des séries entières formelles, etc.

(Pour H_x le rayon de convergence dépend de la série. Dans les deux derniers cas on doit penser aussi aux variantes complexes, i.e. à l'algèbre des germes holomorphes et des séries formelles $\mathbf{C}\,[[x]]$.)

Les éléments $f_1, \ldots, f_n$ de l'algèbre des fonctions A_x engendrent un idéal dans A_x. Il est formé de toutes les combinaisons linéaires $h_1f_1 + \ldots + h_nf_n$ à coefficients h_k de l'algèbre des fonctions A_x. L'idéal engendré par $f_1, \ldots, f_n$ sera noté $(f_1, \ldots, f_n)$.

Définition. On appelle *algèbre locale d'une application f en* 0 l'algèbre quotient de l'algèbre des fonctions par l'idéal engendré par les composantes de f:

$$Q_f = A_x/I_f, \quad I_f = (f_1, \ldots, f_n).$$

Exemple. Soient $m = n = 1$ et $f(x) = x^2$. L'algèbre locale de cette application en 0 est une algèbre des fonctions sur une paire de points infiniment proches, ou algèbre à deux dimensions des polynômes tronqués de degré inférieur à 2 (voir n° 4.1).

Remarque 1. L'algèbre Q_f est indépendante du choix des coordonnées locales sur la source et le but. Plus exactement, le passage à un autre système de coordonnées induit le passage de la suite exacte de R-algèbres $0 \to I_f \to A_x \to Q_f \to 0$ à une suite isomorphe.

Remarque 2. Les algébristes disent qu'une algèbre est *locale* si elle n'admet qu'un seul idéal maximal (i.e. un idéal qui ne soit pas contenu dans un idéal plus grand distinct de la totalité de l'algèbre en question). Géométriquement, les idéaux maximaux correspondent aux sous-variétés minimales, i.e. aux points. Dire qu'une algèbre est « locale » revient donc à dire qu'elle est « concentrée en un point ».

Nos algèbres de fonctions A_x et Q_f sont locales (leur unique idéal maximal se compose des fonctions qui s'annulent à l'origine). Un idéal maximal se note généralement $\mathfrak{m}$.

Remarque 3. On peut donner une définition intrinsèque de l'algèbre locale Q_f. Soit A_y l'algèbre des « fonctions de classe donnée » au point 0 de l'espace but (i.e. une algèbre des fonctions ou des séries de $y_1, \ldots, y_n$). L'application f induit un homomorphisme de R-algèbres $f^*: A_y \to A_x$, $(f^*\varphi)(x) = \varphi(f(x))$. Soit $\mathfrak{m}_y$ l'idéal maximal de A_y (i.e. l'ensemble des fonctions ou séries de y s'annulant en $y = 0$). L'image de $\mathfrak{m}_y$ par l'application f^* n'est pas en général un idéal dans A_x. Construisons l'idéal $I_f = A_x \cdot f^*\mathfrak{m}_y$; alors $Q_f = A_x/I_f$.

Exemple. Soit $A_x = \mathrm{R}[[x]]$, $f(x) = x^2$. Alors

$A_x = \{a_0 + a_1x + \ldots\}$ (toutes les séries formelles);

$\mathfrak{m}_y = \{b_1y + b_2y^2 + \ldots\}$ (séries formelles sans terme constant);

$f^*\mathfrak{m}_y = \{b_1x^2 + b_2x^4 + \ldots\}$ (séries formelles paires sans terme constant);

$A_xf^*\mathfrak{m}_y = \{a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\}$ (séries formelles sans terme constant ni terme de degré 1);

$Q_f = \{a_0 + a_1x\}$ (algèbre des polynômes tronqués de degré inférieur à 2).

Problème 1. Vérifier que la définition de I_f donnée dans la remarque 3 est équivalente à sa définition en termes de coordonnées $I_f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Problème 2. Soient $m = n = 1$, $f(x) = x^k$. Montrer que Q_f est une algèbre de polynômes tronqués de degré inférieur à k, i.e. que c'est une algèbre de polynômes $a_0 + a_1x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1}$ munie de la multiplication d'après la règle $x^k = 0$. Comme espace R-vectoriel, cette algèbre est de dimension k.

Problème 3. Soit f une application de Whitney $\mathrm{R}^{k-1} \to \mathrm{R}^{k-1}$ définie par $y_1 = x_1^k + x_2x_1^{k-2} + \ldots + x_{k-1}x_1$, $y_2 = x_2, \ldots, y_{k-1} =$

$= x_{k-1}$. Montrer que Q_f est une algèbre de polynômes tronqués de degré inférieur à k.

Problème 4. Soient $f_\pm$: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ des applications elliptique et hyperbolique de classe Σ^2 (p. 41). Montrer que les deux **R**-algèbres locales correspondantes $Q_{f_\pm}$ sont de **R**-dimension 4 et qu'elles sont non isomorphes.

Remarque. Dans le cas complexe, les applications $f_\pm$ sont équivalentes et les **C**-algèbres correspondantes sont de **C**-dimension 4 et sont isomorphes. Ainsi donc, les **R**-algèbres non isomorphes $Q_{f_\pm}$ sont deux « formes réelles » d'une seule et même **C**-algèbre, cette dernière étant la complexifiée de chacune des deux **R**-algèbres.

4.3. Multiplicité d'une application en un point. Remarquons que le nombre des images réciproques d'un point générique dans les variantes complexes des problèmes 2 à 4 ci-dessus est exactement égal à la dimension de la **C**-algèbre locale correspondante Q_f sur **C** (k, k et 4 respectivement). Ce n'est pas un fait du hasard.

Soit un germe d'application holomorphe f: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$.

Théorème. *Le nombre des images réciproques proches de* 0 *qu'un point générique proche de* 0 *admet par l'application f est égal à la dimension de l'algèbre locale*:

$$\mu = \dim_{\mathbf{C}} Q_f.$$

La démonstration de ce théorème fait l'objet du paragraphe suivant, où l'on trouve aussi la définition exacte du « nombre d'images réciproques proches de 0 ».

Remarque. Si, dans le cas holomorphe, Q_f est de dimension finie sur **C**, alors 0 est un point isolé dans l'image réciproque de 0 (i.e. dans $f^{-1}(0)$). Il en est autrement dans le cas réel analytique: Q_f est de dimension finie sur **R** si et seulement si 0 est un point isolé dans l'image réciproque *complexe*. Voici un exemple de singularité indéfiniment différentiable admettant une algèbre locale de dimension infinie dans un point qui est un point isolé de l'image réciproque complète de 0: $f = \exp(-1/x^2)$.

Définition. La quantité $\mu = \dim Q_f$ (sur **R** dans le cas réel et sur **C** dans le cas complexe) est appelée *multiplicité locale* (*algébrique*) de l'application f en 0.

On dit que l'application est de *multiplicité finie* si $\mu < \infty$.

Problème. Montrer qu'une application $(\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ n'est jamais de multiplicité finie si $m > n$.

4.4. Théorème de préparation de Weierstrass. Commençons par un exemple. Considérons l'algèbre locale Q_f de l'application $y = x^2$.

C'est une algèbre des polynômes tronqués de degré inférieur à 2 en x:

$$Q_f = \mathbf{R}\,[[x]]/(x^2).$$

En tant qu'espace vectoriel, cette algèbre est de dimension 2, et ses éléments se mettent sous la forme $a_0 + a_1x$, i.e. sous forme de combinaisons linéaires de deux éléments 1, x à coefficients numériques.

Définition. On appelle *ensemble de générateurs* d'une algèbre locale de dimension finie $Q_f = A_x/I_f$ un ensemble d'éléments $(e_1, \ldots, e_\mu)$ de l'algèbre de fonctions A_x qui se transforme en ensemble de générateurs de l'espace vectoriel Q_f par passage au quotient par l'idéal I_f.

Exemple. Comme ensemble de générateurs d'une algèbre de polynômes tronqués de degré inférieur à k en x, on peut prendre k monômes $1, x, \ldots, x^{k-1}$. Ces générateurs sont indépendants, i.e. forment une base dans l'espace Q_f.

Problème. Montrer que l'algèbre locale Q_f d'une application différentiable f de dimension finie admet toujours une base monomiale.

Pour $f = x^2$ l'algèbre locale Q_f est constituée de polynômes tronqués de degré inférieur à 2, si bien que la base est formée de deux monômes : $1, x$. Remarquons que toute fonction α de A_x se laisse mettre sous forme de combinaison linéaire de monômes de base à coefficients pairs:

$$\alpha(x) = c_1(x^2)\cdot 1 + c_2(x^2)\cdot x$$

(décomposition en composantes paire et impaire). Dans les cas formel et analytique cette décomposition est même définie de façon unique (dans le cas indéfiniment différentiable les coefficients ne sont définis de façon unique que sur le demi-axe positif).

Le théorème de préparation de Weierstrass est une ample généralisation de la décomposition citée d'une fonction en composantes paire et impaire.

Théorème. *Soit $y = f(x)$ une application de multiplicité finie, et soit $(e_1, \ldots, e_\mu)$ ensemble de générateurs de son algèbre locale Q_f. Toute fonction α se laisse alors décomposer comme suit:*

$$\alpha(x) = c_1(f(x))\, e_1(x) + \ldots + c_\mu(f(x))\, e_\mu(x),$$

où c_k sont des fonctions de y.

Autrement dit, pour tout élément α de l'algèbre de fonctions A_x on a

$$\alpha = (f^*c_1)\, e_1 + \ldots + (f^*c_\mu) e_\mu,$$

où c_k sont les éléments de l'algèbre de fonctions A_y.

D é m o n s t r a t i o n. Démontrons ce théorème pour les séries

entières formelles. Par définition de l'ensemble de générateurs, tout α se décompose en

$$\alpha(x)=\sum_{k=1}^{\mu} c_k e_k(x)+\sum_{r=1}^{n} \alpha_r(x) f_r(x), \quad c_k \in \mathbf{R} \tag{1}$$

(la deuxième somme est le terme général de l'idéal I_f). En particulier, α_r se laisse décomposer pour r quelconque d'après la formule (1):

$$\alpha_r(x)=\sum_{k=1}^{\mu} c_{k,\,r} e_k(x)+\sum_{s=1}^{n} \alpha_{r,\,s}(x) f_s(x).$$

Portant cette décomposition dans (1), on obtient une décomposition améliorée :

$$\alpha(x)=\sum_{k=1}^{\mu}\Big(c_k+\sum_{r=1}^{n} c_{k,\,r} f_r(x)\Big) e_k(x)+\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \alpha_{r,\,s}(x) f_r(x) f_s(x).$$

En décomposant successivement les coefficients $\alpha_{r,\,s}(x)$ d'après (1) et en appliquant la procédure d'amélioration, nous augmenterons chaque fois le degré du produit des composantes de f dans le second terme de la décomposition et les degrés des polynômes en composantes de f dans les coefficients des e_k. Remarquons que les termes de bas degré dans les polynômes construits initialement comme coefficients des e_k ne changent pas dans la suite.

Réitérant cette procédure une infinité de fois, on annule le second terme, tandis que les coefficients du premier deviennent des séries formelles en composantes de f_k, i.e. on aboutit à la décomposition cherchée.

Pour les applications analytiques ou holomorphes, le théorème se démontre par une procédure analogue mais un peu plus fine, avec contrôle de la convergence des séries (Serre, Houzel ; voir par exemple [145], [9]). Pour les applications indéfiniment différentiables le théorème de préparation a été démontré par Malgrange. Dans ce cas la démonstration est beaucoup plus délicate (voir par exemple [199], [200], [205]).

La signification essentielle du théorème de préparation pour l'étude des singularités est qu'il permet de justifier « la troncature », i.e. d'étendre les résultats sur les formes normales, etc., obtenus pour les jets finis aux applications différentiables *).

Il ne faut pas pour autant surestimer la valeur appliquée des théorèmes qui en résultent. Considérons par exemple la singularité d'une fonction de m variables en un point minimum non dégénéré (la différentielle seconde y est définie positive). On montre qu'il existe un changement de variables par lequel f se réduit à la forme normale $f = x_1^2 + \ldots + x_m^2$. Or, cette forme ne nous renseigne pas

*) En effet, le fait que les e_k forment une base d'algèbre se vérifie d'après un jet fini.

davantage sur la topologie de f que la forme normale de f obtenue au niveau des 2-jets:

$$f = x_1^2 + \ldots + x_m^2 + o(|x|^2).$$

Il semble que la réduction au niveau des k-jets est déjà suffisante pour toutes les applications raisonnables.

Plus tard nous démontrerons avec force détails les théorèmes de réduction au niveau des k-jets ou des séries formelles (i.e. des ∞-jets). La démonstration se laisse immédiatement généraliser aux cas différentiable, analytique et holomorphe, quitte à utiliser la variante correspondante du théorème de préparation.

Remarque. On peut ne pas se soucier de justifier le passage des séries formelles aux objets analytiques et différentiables lorsque les résultats sont parallèles pour tous les cas (formel, analytique, holomorphe et différentiable). Il n'en est pas ainsi dans tous les problèmes: il suffit d'évoquer les problèmes à petits dénominateurs, cf. [9]. Dans de pareils cas il est nécessaire de justifier la convergence et d'analyser le cas différentiable, car la divergence des séries traduit une différence foncière, topologique entre les comportements d'un objet différentiable ou analytique et de sa forme normale au niveau des jets (effets de résonances dans les problèmes à petits dénominateurs; cf. [24], chap. V).

Une telle situation est rare en théorie des singularités. (Gabriélov [102] a donné cependant un exemple de rapport formel entre fonctions analytiques qui n'admettent pas de rapport analytique. Voir aussi la théorie de J. Ecalle et S. Voronin, p. 203.)

4.5. Exemples et applications. *Exemple* 1. Considérons des fonctions symétriques de m variables. Il ressort du théorème de préparation que toute fonction de ce type se laisse exprimer comme fonction des fonctions symétriques fondamentales:

$$\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_m, \ \ldots, \ \sigma_m = x_1, \ \ldots, \ x_m.$$

En effet, considérons une « application de Viète » $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ (ou $\mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$) qui à un point de coordonnées $(x_1, \ldots, x_m)$ fait correspondre un point de coordonnées $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$. Il est facile de voir que c'est une application de multiplicité finie, à savoir $\mu = m!$; on peut prendre comme base par exemple, μ monômes $e_k = x_1^{k_1} \ldots$ $\ldots x_m^{k_m}$ tels que $0 \leqslant k_s < s$. D'après le théorème de préparation, toute fonction se laisse mettre sous la forme $\sum c_k(\sigma) e_k$. Or, pour une fonction symétrique tous les coefficients sauf c_0 sont nuls comme demandé.

Par « fonction », on entend une série réelle ou complexe, formelle ou convergente, ou un germe de fonction indéfiniment différentiable

en 0. En fait, ce résultat est aussi vrai globalement (par exemple pour les fonctions indéfiniment différentiables dans $\mathbf{R}^n$ tout entier, voir G. Glaeser [119], ou pour les polynômes).

Exemple 2. On rencontre souvent des situations où une fonction α décomposable d'après le théorème de préparation dépend différentiablement (analytiquement, formellement) non seulement des variables x mais aussi des paramètres t. Dans de pareils cas, en plus de la décomposition pour chaque valeur des paramètres, on peut obtenir une décomposition de la fonction dans laquelle les coefficients dépendent différentiablement (analytiquement, formellement) des paramètres :

$$\alpha(x, t) = \sum c_k(f(x), t)\, e_k(x)$$

(il s'agit de germes en 0 de la fonction de (x, t) ou de séries formelles entières suivant x et t).

Pour la démonstration, il suffit d'utiliser le théorème de préparation pour la suspension de l'application f à l'aide de la transformation identique des paramètres, i.e. pour l'application

$$(x, t) \longmapsto (f(x), t).$$

Cette application est de multiplicité finie, et son algèbre locale a comme générateurs « les mêmes » fonctions $e_k(x)$ que celle de f (considérées comme éléments de l'algèbre de fonctions $A_{x,t}$ des variables x et t).

On peut faire mieux et, supposant que f dépende des paramètres, remplacer les $e_k(x)$ par des fonctions arbitraires $E_k(x, t)$ qui se réduisent à $e_k(x)$ quand $t = 0$. En effet, les fonctions $E_k(x, t)$ forment un ensemble de générateurs de l'algèbre locale de l'application

$$(x, t) \longmapsto (F(x, t), t)$$

si et seulement si les fonctions $e_k(x) = E_k(x, 0)$ forment un ensemble de générateurs de l'algèbre locale de l'application $x \longmapsto f(x) = F(x, 0)$ (cela ressort du fait que $F(x, t) - F(x, 0)$ et $E_k(x, t) - E_k(x, 0)$ appartiennent à l'idéal engendré par t dans l'algèbre $A_{x,t}$).

Exemple 3 (« théorème de la division »). *Soit*

$$F(x, t) = x^\mu + u_1(t)\, x^{\mu-1} + \ldots + u_k(t), \quad u_s(0) = 0.$$

Alors toute fonction $\alpha(x, t)$ *se laisse mettre sous la forme*

$$\alpha(x, t) = g(x, t)\, F(x, t) + \sum_{r=0}^{\mu-1} h_r(t)\, x^r$$

(g est le quotient, le polynôme de degré $\mu - 1$, *le reste).*

D é m o n s t r a t i o n. Pour $t = 0$ la fonction F devient $f = x^\mu$. L'algèbre locale de l'application f est engendrée par les

monômes 1, x, . . ., $x^{\mu-1}$. Donc

$$\alpha(x, t) = \sum_{r=0}^{\mu-1} c_r(F(x, t), t)\, x^r.$$

En mettant chaque c_r sous la forme $c_r = g_r(x, t)\,F + h_r(t)$, on obtient la décomposition cherchée.

Le théorème de la division reste vrai dans des cas différentiable-formel, analytique et holomorphe ; la variante holomorphe du théo, rème de division est due à Weierstrass.

Exemple 4 (théorème de préparation avec un paramètre). Soit un germe d'application de multiplicité finie dépendant différentiablement d'un paramètre t de [0, 1],

$$f_t : (\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0).$$

Supposons que les fonctions $e_1(x)$, . . ., $e_\mu(x)$ de A_x engendrent (après passage au quotient par l'idéal I_{f_t}) une algèbre locale Q_{f_t} pour chaque t. Alors toute fonction $\alpha(t, x)$ dépendant différentiablement de t admet une décomposition

$$\alpha(t, x) = \sum c_k(f_t(x), t)\, e_k(x)$$

à coefficients c_k différentiables sur [0, 1].

La démonstration s'obtient à partir de la proposition locale correspondante de l'exemple 2 au moyen d'une partition de l'unité. En effet, conformément à l'exemple 2, pour tout point $\tau \in [0, 1]$ il existe un voisinage Δ dans lequel une décomposition locale existe. Construisons un recouvrement fini $\{\Delta_i\}$. Soient $\chi_i(t)$ des fonctions différentiables sur [0, 1] non nulles seulement dans leurs voisinages respectifs Δ_i et telles que $\sum \chi_i = 1$.

Supposons que α admette sur Δ_i une décomposition locale de la forme

$$\alpha(t, x) = \sum c_{k,i}(f_t(x), t)\, e_k(x), \quad t \in \Delta_i.$$

Définissons le produit $\chi_i c_{k,i}$ en dehors de Δ_i où on le suppose nul. Alors les fonctions

$$c_k(y, t) = \sum_i \chi_i(t)\, c_{k,i}(y, t)$$

définissent la décomposition cherchée sur l'intervalle [0, 1] tout entier.

Remarque. Revenons à la décomposition indiquée dans le théorème de préparation général :

$$\alpha(x) = c_1(f(x))e_1(x) + \ldots + c_\mu(f(x))e_\mu(x).$$

Il serait intéressant de construire un opérateur linéaire associant à toute fonction $\alpha(x)$ une famille de fonctions $c_k(y)$ et d'étudier ses propriétés différentielles. Soient par exemple $f(x) = x^2$ et $e_1 = 1$, $e_2 = x$. Alors il est facile, pour toute fonction α, de majorer les coefficients $c_k(f(x))$ par la dérivée première de α. D'une façon générale, on montre (voir [8]) que dans le cas holomorphe un opérateur associant $c_k(f(x))$ à $\alpha(x)$ n'est pas pire du point de vue des propriétés différentielles qu'un « opérateur différentiel d'ordre fini »:

$$| c_k (f(x)) |_{|x| \leqslant r} \leqslant \mathrm{Cte} \cdot \delta^{\nu} | \alpha(x) |_{|x| \leqslant r - \delta} .$$

Malheureusement, on ne dispose pas de majoration analogue dans le cas de fonctions différentiables. Une telle majoration permettrait de démontrer directement le théorème sur la stabilité des germes infinitésimalement stables à peu près comme le théorème de la fonction implicite (cf. [9]).

§ 5. Multiplicité locale d'une application holomorphe

Dans ce paragraphe nous montrons que la multiplicité algébrique d'une application holomorphe coïncide avec sa multiplicité géométrique (avec l'indice du point singulier d'un champ de vecteurs holomorphe correspondant). Bien que ce résultat fut connu encore des classiques, sa première démonstration détaillée n'a été publiée qu'en 1967 par V. Palomodov [230]. Quant à la démonstration élémentaire qui sera développée dans ce paragraphe, son idée appartient à A. Kushnirenko [180].

L'indice d'un point singulier d'un champ de vecteurs réel peut se calculer comme signature d'une forme quadratique convenable sur l'algèbre locale de la singularité (formule de Levine-Eisenbud-Khimshiashvili [169], [98]). Cette formule, fondée sur la non-dégénérescence des formes quadratiques sur les algèbres locales (dualité de Grothendieck), sera démontrée ici en généralisant au cas multidimensionnel le théorème d'Abel sur la trace d'une forme holomorphe.

5.1. Multiplicité. Soit $f: (\mathbf{C}^n, a) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ un germe d'application holomorphe en un point a. Considérons l'algèbre $\mathbf{C}\{x\}_a$ de tous les germes de fonctions holomorphes en a. Les germes des composantes de l'application f engendrent un idéal $I_{f,a}$ dans cette algèbre.

Définition. On appelle *multiplicité* du germe de f en a la dimension de son algèbre locale:

$$\mu_a[f] = \dim_{\mathbf{C}} Q_{f,a}; \quad Q_{f,a} = \mathbf{C}\{x\}_a / I_{f,a}.$$

Exemple 1. Si f est un opérateur linéaire non dégénéré, la multiplicité du point 0 est 1.

Exemple 2. Soient $f_1 = x_1x_2^2$, $f_2 = x_1^2 + x_2^3$. Associons à un monôme $x_1^{k_1}x_2^{k_2}$ un point (k_1, k_2) du réseau des entiers (fig. 37, *a*). Marquons les monômes appartenant à l'idéal $I = (f_1, f_2)$. En plus de $x_1x_2^2$, il contient tous les monômes du coin hachuré. Le binôme f_2 se représente par un segment d'extrémités (2, 0) et (0, 3). En déplaçant ce segment de 1 vers la droite, on s'assure que $x_1^3 \in I$, et en le déplaçant de 2

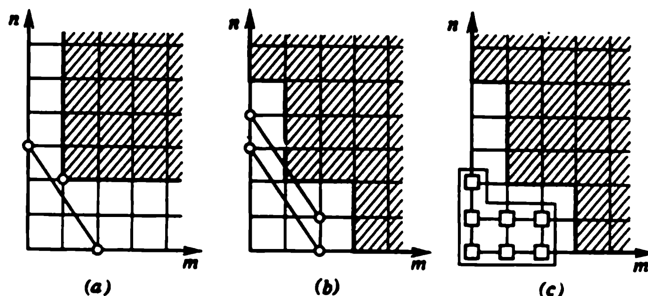


Fig. 37

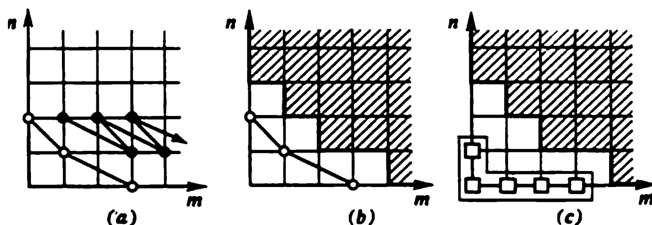


Fig. 38

vers le haut, on voit que $x_2^5 \in I$. Ainsi donc, tous les monômes du domaine hachuré sur la figure 37, *b* appartiennent à I. Sur la figure 37, *c* sont marqués sept monômes qui définissent une C-base de l'algèbre $Q_{f,\,0}$. Ainsi donc, $\mu_0\,[f] = 7$.

Exemple 3. Soient $f_1 = x_2^2 - x_1x_2$, $f_2 = x_1x_2 - x_1^3$. Représentons comme précédemment f_1 et f_2 par des segments (fig. 38, *a*). Les sommets de la ligne en zig-zag de la figure 38, *a* répondent à des monômes congrus modulo $I = (f_1, f_2)$. Ainsi donc, $x_1\,x_2^2$ est congru mod I à un monôme de degré aussi grand que l'on veut. On vérifie sans peine que $x_1x_2^2 \in I$ (par exemple parce que $x_1x_2^2 \equiv x_1\cdot x_2^2\cdot x_1 \mod I$). Tous les monômes du domaine hachuré sur la figure 38, *b* appartiennent donc à l'idéal. Une base de $Q_{f,\,0}$ est engendrée par cinq monômes encadrés sur la figure 38, *c*, si bien que $\mu\,[f] = 5$.

5.2. L'indice est égal à la multiplicité.

Définition. On appelle *indice* $\text{ind}_a [f]$ d'un germe d'application f en un point a le degré de l'application $f/\| f \|: S_\varepsilon^{2n-1} \to S_1^{2n-1}$ d'une sphère suffisamment petite $\| x - a \| = \varepsilon$ de l'espace source dans la sphère unité de l'espace but.

S'il existe un voisinage de a sans images réciproques de 0 sauf peut-être le point a lui-même, l'indice est bien défini (indépendant du choix de la petite sphère S_ε^{2n-1}). L'indice du germe en le point 0 non isolé n'est pas défini. Par *multiplicité* et *indice* d'une racine a du système d'équations holomorphes $f_1 = \ldots = f_n = 0$ définies au voisinage du point a on entend la multiplicité et l'indice du germe d'application $f = f_1, \ldots, f_n$ au point a.

Théorème 1. *L'indice d'un germe holomorphe de multiplicité finie est égal à sa multiplicité.*

Théorème 2. *Un germe d'application holomorphe n'est pas de multiplicité finie en un point a si et seulement si a est une image réciproque non isolée du zéro du germe.*

La démonstration du théorème 2 sera donnée au n° 5.9. Celle du théorème 1 sera donnée tout de suite. Elle est basée sur les propositions 1° à 7° démontrées dans les nos 5.3 à 5.8.

1° L'application de Pham est universelle.

Définition. Une application $\Phi^m: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ définie par

$$y_1 = x_1^{m_1}, \ldots, y_n = x_n^{m_n}$$

est appelée *application de Pham.*

Définition. On dit que deux germes f, g en un point a sont *algébriquement équivalents* ou, en abrégé, *A-équivalents*, s'il existe un germe de famille holomorphe d'applications linéaires non dégénérées $A(x) \in \in \text{GL}(n, \mathbf{C})$ tel que $f(x) = A(x) g(x)$.

Proposition. *Soit* $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to \mathbf{C}^n$ *un germe d'application de multiplicité finie. Il existe alors une application de Pham* Φ^m *telle que le germe de f en* 0 *soit A-équivalent à celui de l'application* $\Phi_\varepsilon^m = \Phi^m + \varepsilon f$ *pour tout* $\varepsilon \neq 0$.

Autrement dit, en déformant l'application de Pham, on peut obtenir un germe arbitraire (à l'A-équivalence près) de multiplicité finie.

2° **Proposition.** *L'indice et la multiplicité du point* 0 *d'une application de Pham coïncident.*

3° **Proposition.** *Deux germes A-équivalents ont même indice.*

4° **Proposition.** *Deux germes A-équivalents ont même multiplicité.*

5° **L'indice est additif.** Supposons qu'un système de n équations holomorphes dans $\mathbf{C}^n$ dépende holomorphiquement d'un paramètre. Une variation du paramètre peut entraîner la décomposition de la racine multiple du système.

Proposition. *La somme des indices des racines engendrées par la décomposition d'une racine multiple du système est égale à l'indice de la racine multiple.*

6° **La multiplicité est sous-additive.**

Proposition. *Les multiplicités des racines engendrées par la décomposition d'une racine multiple du système ne sont pas supérieures en somme à la multiplicité de la racine multiple.*

7° **Proposition.** *La multiplicité d'une racine est non inférieure à l'indice de la racine.*

Démonstration du théorème 1. Soit f: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ un germe d'application de multiplicité finie. Choisissons une application de Pham Φ telle que les germes de f et de $\Phi_\varepsilon = \Phi + \varepsilon f$ en 0 pour $\varepsilon \neq 0$ soient A-équivalents (voir 1°). Considérons un voisinage suffisamment petit U de 0. Choisissons un $\varepsilon(U) > 0$ suffisamment petit. Considérons la déformée de l'application de Pham $\Phi_\varepsilon = \Psi$. Soient a_i les racines du système $\Psi = 0$ situées dans le voisinage U. Nous obtenons une suite de relations:

$$\begin{aligned} \mu_0[\Phi] &\geqslant \sum \mu_{a_i}[\Psi] \quad \text{(voir 6°)},\\ \mu_{a_i}[\Psi] &\geqslant \operatorname{ind}_{a_i}[\Psi] \quad \text{(voir 7°)},\\ \sum \operatorname{ind}_{a_i}[\Psi] &= \operatorname{ind}_0[\Phi] \quad \text{(voir 5°)}\\ \operatorname{ind}_0[\Phi] &= \mu_0[\Phi] \quad \text{(voir 2°)}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Il ressort de cette suite que toutes les inégalités qui y figurent sont des égalités. Puisque $f(0) = 0$, le point 0 est une des racines a_i. Donc

$$\mu_0[\Psi] = \operatorname{ind}_0[\Psi]$$

(car l'inégalité (1) devient égalité). Or, puisque les germes de f et Ψ sont A-équivalents, on a

$$\mu_0[f] = \mu_0[\Psi] \quad \text{(voir 3°)},$$
$$\operatorname{ind}_0[f] = \operatorname{ind}_0[\Psi] \quad \text{(voir 4°)}.$$

Le théorème 1 s'en trouve démontré pour $f(0) = 0$. Si par contre $f(0) \neq 0$, on vérifie sans peine que

$$\mu_0[f] = \operatorname{ind}_0[f] = 0.$$

5.3. Indice d'un germe réel. On définit l'indice non seulement pour des applications holomorphes mais aussi pour des applications différentiables d'espaces réels.

Soit $f: (\mathbf{R}^n, a) \to \mathbf{R}^n$ un germe différentiable en un point a.

Définition. On appelle *indice* $\mathrm{ind}_a [f]$ le degré de l'application $f/\| f \|: S_\varepsilon^{n-1} \to S_1^{n-1}$ d'une sphère suffisamment petite $\| x - a \| = \varepsilon$ de l'espace source dans la sphère unité de l'espace but.

L'indice est non défini si a est un zéro non isolé du germe f.

Exemple. Si $f(0) = 0$ et la matrice jacobienne de f en 0 est non dégénérée, l'indice du point 0 est 1 ou -1, en fonction du signe du jacobien.

Soit une boule fermée $B \subset \mathbf{R}^n$ qui ne contient aucun zéro de l'application $f: (\mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}^n$ sauf peut-être le point 0, et soit $\{f_\varepsilon\}$ une déformation différentiable quelconque de f.

Proposition 1. *Pour des ε suffisamment petits, la somme des indices des zéros de la déformée f_ε dans la boule B est égale à l'indice du point* 0 *de l'application initiale f si le nombre de ces zéros est fini.*

En effet: 1° toutes les applications $\varphi_\varepsilon = f_\varepsilon/\| f_\varepsilon \|: \partial B \to S_1$ pour des ε suffisamment petits sont homotopes; 2° le degré de l'application φ_ε est égal à la somme des indices des zéros de f_ε dans la boule B.

Corollaire. *L'indice du point* 0 *de l'application f est égal au nombre des images réciproques dans la boule B de toute valeur régulière suffisamment petite $\varepsilon \in \mathbf{R}^n$, compte tenu du signe du jacobien dans ces points.*

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer à la déformation $\{f_\varepsilon = f - \varepsilon\}$ le résultat de la proposition 1 et de calculer l'indice du point 0 non dégénéré.

Définition. On dit que deux germes $f, g: (\mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}^n$ sont *A-équivalents au sens réel* s'il existe un germe de famille différentiable d'applications linéaires $A(x): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tel que $\det A(0) > 0$ et $g(x) = A(x) f(x)$.

Proposition 2. *Deux germes A-équivalents au sens réel ont même indice.*

D é m o n s t r a t i o n. Puisque $\det A(0) > 0$, on peut joindre A à E par une homotopie A_t de $\det A_t(x) > 0$. L'homotopie $g_t = A_t f$ joint g à f et n'a aucun zéro sur une petite sphère.

5.4. Indice d'un germe holomorphe.

Proposition 1. *Le déterminant de la décomplexifiée $\hat{A}: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ d'une application linéaire complexe non dégénérée $A: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ est positif.*

D é m o n s t r a t i o n. $\operatorname{Det} \hat{A} = |\det A|^2$ (on obtient cette formule par calcul direct dans une base où la matrice A est trigonale).

[Une autre démonstration : 1° l'ensemble des opérateurs linéaires non dégénérés $A: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ est connexe. Pour la démonstration, il suffit de joindre deux matrices non dégénérées par une droite complexe : elle traversera l'ensemble des matrices dégénérées en n points au plus ; 2° joignons un opérateur complexe non dégénéré à 1 par un chemin formé d'opérateurs complexes non dégénérés: les décomplexifiés de ces opérateurs sont non dégénérés (non-dégénérescence = bijectivité). Par conséquent, tous ces décomplexifiés sont de déterminant positif.]

Corollaire. *Deux germes holomorphes A-équivalents ont même indice.*

Démonstration. Les décomplexifiés de deux germes holomorphes A-équivalents sont A-équivalents au sens réel. En effet, si $g = Af$, son décomplexifié $\hat{g} = \hat{A}\hat{f}$ et $\det \hat{A}(0) > 0$.

Soit B une boule fermée de centre en $a \in \mathbf{C}^n$. Soit f une application holomorphe qui ne s'annule en aucun point de $B \setminus a$.

Proposition 2. *L'indice en a du germe de f est égal au nombre d'images réciproques dans B de toute valeur régulière ε suffisamment proche de* 0.

Démonstration. L'indice est égal au nombre algébrique d'images réciproques de ε, compte tenu du signe du jacobien de f (voir n° 5.2). Vu le lemme, le signe en question est toujours positif.

Remarque. Considérons une application holomorphe d'un domaine compact de dimension $2n$ dans $\mathbf{C}^n$ qui ne s'annule en aucun point au bord du domaine. Alors *le degré de l'application* $f/\|f\|$ *du bord dans* S_1^{2n-1} *est non négatif*, parce que égal au nombre d'images réciproques de ε.

Proposition 3. *Supposons que l'application g ne s'annule en aucun point au bord d'un domaine borné* $U \subset \mathbf{C}^n$ *et que le degré de l'application* $g/\|g\|$ *du bord de U dans la sphère unité soit k. Alors le système* $g = 0$ *admet un nombre fini de racines dans U et la somme de leurs indices est égale à k.*

La proposition 3 découle du

Lemme. *Dans les conditions de la proposition* 3, *le nombre de solutions géométriquement distinctes du système* $g = 0$ *dans U est non supérieur à k.*

Démonstration. Supposons que le système $a_1, \ldots, a_{k+1}$ admette $k+1$ racines.

1° Il existe une application polynomiale $P: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ pour laquelle les points $a_1, \ldots, a_{k+1}$ sont des racines non dégénérées.

2° L'application $g_\varepsilon = g + \varepsilon P$ admet des racines non dégénérées dans les points $a_1, \ldots, a_{k+1}$ pour presque tout ε.

3° Pour $|\varepsilon|$ petit, l'indice de l'application $g_\varepsilon/\|g_\varepsilon\|$ du bord de U est égal à k.

4° Soit un ε petit tel que les racines a_i de l'application g_ε soient non dégénérées. Soient B_i de petites boules centrées en a_i et ne contenant aucune autre racine de g_ε. Le degré de l'application $g_\varepsilon/\|g_\varepsilon\|$ d'une sphère ∂B_i dans S_1^{2n-1} est égal à 1 ; par conséquent, le degré de l'application $\bigcup \partial B_i$ dans S_1^{2n-1} est égal à $k+1$.

Considérons le domaine $U' = U \setminus \bigcup B_i$. Le degré d'une application du bord de U' est non négatif (voir remarque) ; d'autre part, ce degré est $k-(k+1) = -1$, contradiction.

Corollaire 1. *L'indice d'une racine est strictement positif.*

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer le lemme à la boule contenant une racine unique du système.

Corollaire 2. *En se décomposant, une racine isolée fait naître un nombre fini de racines dont la somme d'indices est égale à l'indice de la racine décomposée.*

Corollaire 3. *Dans les conditions de la proposition* 3, *chaque racine a un indice non supérieur à k.*

5.5. Multiplicité et A-équivalence.

Proposition 1. *Deux germes A-équivalents ont même multiplicité.*

En effet, les idéaux I_f et I_g de deux germes A-équivalents f, g se confondent.

Proposition 2. *Soit f un germe de multiplicité μ, et soit g un deuxième germe dont la différence de f est un petit d'ordre $\mu+1$. Alors g et f sont A-équivalents.*

Corollaire. *Soit f un germe en* 0 *dont la matrice jacobienne est non dégénérée. Alors la multiplicité de f est* 1.

En effet, cela est évident pour f linéaire, et la différence entre l'application linéaire et non linéaire est un petit d'ordre 2.

Proposition 3. *Toute racine de multiplicité finie d'un système d'équations holomorphes est isolée.*

Pour la démonstration des propositions 2 et 3, nous aurons besoin d'un

Lemme. *Soit f un germe de multiplicité μ. Alors son idéal I_f contient le produit de μ germes quelconques de fonctions qui s'annulent en* 0.

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. Pour un produit $\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu$, construisons $\mu+1$ germes $1, \varphi_1, \varphi_1\varphi_2, \ldots, \varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu$. Ces germes sont linéairement dépendants dans l'anneau Q_f, i.e. il existe une combinaison linéaire non triviale

$$c_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_\mu\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu \in I_f.$$

Soit c_r le premier coefficient non nul. Alors

$$\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_r (c_r + c_{r+1} \varphi_{r+1} + \ldots + c_\mu \varphi_{r+1} \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu) \in I_f.$$

Le facteur entre parenthèses est inversible dans l'anneau $\mathbf{C}\{x\}$, car $c_r \neq 0$. Par conséquent, le produit $\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_r$ appartient à l'idéal I_f; il en est donc de même pour $\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu$.

Démonstration de la proposition 2. Tout germe ψ de fonction d'ordre $\mu + 1$ se laisse mettre sous la forme $\psi = \sum h_i f_i$, où $h_i(0) = 0$ (vu le lemme). Décomposons de cette manière toutes les composantes $\varphi = g - f$: il vient $\varphi = Hf$, où la matrice $H(0) = 0$. Donc $g = (E + H) f$, ce qui prouve que les germes f, g sont bien A-équivalents.

Démonstration de la proposition 3. Soit f un germe de multiplicité μ en 0. Mettons un germe x_j^μ sous la forme $x_j^\mu = \sum h_{j,i} f_i$. Le domaine dans lequel les germes $h_{j,i}$ et f_i ont un prolongement holomorphe ne contient aucune racine du système $f = 0$ distincte de 0. ∎

5.6. Propriétés de l'application de Pham. Soit f un germe d'application de multiplicité μ en 0. Considérons une application de Pham Φ^m, $m = \mu + 1, \ldots, \mu + 1$, et sa déformation $\Phi_\varepsilon^m = \Phi^m + \varepsilon f$.

Proposition 1. *Le germe f est A-équivalent en 0 au germe de Φ_ε^m pour tout $\varepsilon \neq 0$.*

Démonstration. Le germe εf est A-équivalent à celui de f en 0, et la différence entre Φ_ε^m et εf est d'ordre de petitesse $\mu + 1$.

Proposition 2. *L'indice de l'application de Pham est égal à sa multiplicité en* 0.

Démonstration. 1° L'indice est égal au nombre de solutions du système d'équations $x_1^{m_1} = \varepsilon_1, \ldots, x_n^{m_n} = \varepsilon_n$ pour presque tous $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ (voir la proposition 2 du n° 5.4). Donc $\operatorname{ind}_0 [\Phi^m] = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$.

2° L'algèbre locale $Q_{\Phi^m, 0}$ est engendrée par des monômes $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$, où $0 \leqslant k_1 < m_1, \ldots, 0 \leqslant k_n < m_n$. La dimension $\mu_0 [\Phi^m]$ de cette algèbre est donc égale à $m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$.

5.7. La multiplicité est sous-additive. Soit $\{f_\varepsilon\}$ une déformation arbitraire d'un germe de multiplicité μ de l'application f en 0.

Proposition 1 (sur la sous-additivité de la multiplicité). *Il existe dans l'espace source un voisinage U de 0 tel que pour tout $|\varepsilon|$ suffisamment petit le nombre de racines du système $f_\varepsilon = 0$ dans U, compte tenu de leur multiplicité, soit non supérieur à μ.*

Remarque. La multiplicité est sous-additive même dans le cas réel où, à la différence du cas complexe, elle n'est pas additive.

Corollaire. *L'indice de tout germe de multiplicité finie est non supérieur à sa multiplicité.*

Pour démontrer ce corollaire, il suffit d'appliquer la proposition 1 à une déformation spéciale $\{f_\varepsilon = f - \varepsilon\}$.

Soient $U \subset \mathbf{C}^n$ un ensemble ouvert, $A(U)$ l'algèbre des fonctions holomorphes définies sur U, et $I_g(U)$ l'idéal de cette algèbre engendré par les fonctions $g_1, \ldots, g_n$. On appelle *algèbre $Q_g(U)$ de l'application g dans U* l'algèbre quotient $A(U)/I_g(U)$.

On appelle *sous-algèbre polynomiale $Q_g[U]$ de l'application g dans U* l'image d'une algèbre de polynômes dans l'algèbre $Q_g(U)$ par l'homomorphisme de passage au quotient.

La sous-additivité de la multiplicité algébrique découle de deux propositions qui suivent :

Proposition 2. *Pour toute déformée $\{f_\varepsilon\}$ d'un germe d'application f de multiplicité μ en 0, il existe dans l'espace source un voisinage U de 0 tel que pour tout $|\varepsilon|$ suffisamment petit la $\mathbf{C}$-dimension de la sous-algèbre polynomiale de f_ε dans U soit non supérieure à μ.*

Proposition 3. *Le nombre de solutions du système $g = 0$ d'équations holomorphes dans U, compte tenu de leur multiplicité, est non supérieur à la $\mathbf{C}$-dimension de la sous-algèbre polynomiale de l'application g dans U.*

La proposition 3 sera démontrée dans le n° 5.8. Pour démontrer la proposition 2, nous aurons besoin d'un supplément au théorème de préparation de Weierstrass. Soit f un germe d'application de multiplicité finie, et soient $e_1, \ldots, e_\mu$ des fonctions qui définissent une base de son algèbre locale. D'après le théorème de préparation, tout germe de fonction holomorphe φ admet une décomposition de Weierstrass :

$$\varphi(x) = \sum e_i(x)\, \varphi_i(y), \quad y = f(x).$$

Lemme 1. *Il existe dans les espaces but et source des voisinages de 0 U_1, U_2 sur lesquels sont définies les fonctions figurant dans les décompositions de Weierstrass de la totalité des polynômes.*

D é m o n s t r a t i o n. Prenons comme U_1 un domaine dans lequel se prolongent holomorphiquement les fonctions φ_i figurant dans la décomposition de la suite finie de fonctions

$$1, \quad x_j e_k \quad (1 \leqslant j \leqslant n, \quad 1 \leqslant k \leqslant \mu).$$

Comme U_2, prenons la partie de $f^{-1}(U_1)$ dans laquelle se prolongent holomorphiquement les fonctions e_k. Procédons par récurrence sur le degré du polynôme. Tout polynôme P de degré p se laisse met-

tre sous la forme

$$P = \sum x_j Q_j + c \cdot 1, \quad \deg Q_j < p.$$

Portons dans cette représentation les décompositions de Weierstrass pour Q_j et utilisons les décompositions de Weierstrass des fonctions $x_j e_h$ et 1 : nous obtenons la décomposition du lemme 1.

Soit une déformation $\{f_\varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathbf{C}^k$, d'un germe d'application holomorphe f: $\mathbf{C}^n$, $0) \to \mathbf{C}^n$. Soit un germe d'application F: $(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$, $0) \to \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$ tel que $F(x, \varepsilon) = (f_\varepsilon(x), \varepsilon)$.

Lemme 2. *Les algèbres locales des germes f, F sont isomorphes. Si les fonctions $e_1, \ldots, e_\mu$ forment une base dans l'algèbre de f, elles en forment une aussi dans l'algèbre de F.*

D é m o n s t r a t i o n. L'idéal engendré par les composantes $F_1, \ldots, F_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ de l'application F dans l'algèbre des germes de fonctions holomorphes en $0 \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$ se confond avec l'idéal engendré par les fonctions $f_1, \ldots, f_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$.

Soient $e_1, \ldots, e_\mu$ des fonctions dont les germes en 0 forment une base de l'algèbre locale du germe f, et soit $\{f_\varepsilon\}$ une déformation de f.

Lemme 3. *Il existe dans $\mathbf{C}^n$ un voisinage U de 0 tel que pour tout $|\varepsilon|$ suffisamment petit l'espace linéaire engendré par les images des fonctions $e_1, \ldots, e_\mu$ dans l'algèbre $Q_{f_\varepsilon}(U)$ contienne la sous-algèbre polynomiale $Q_{f_\varepsilon}[U]$.*

D é m o n s t r a t i o n. Les fonctions $e_1, \ldots, e_\mu$ forment une base de l'algèbre locale de F (lemme 2). Appliquons à F le lemme 1. D'après ce lemme, il existe un voisinage de zéro $U \times V \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$ et une boule B dans l'espace but $\mathbf{C}^{n+k}$ tels que : (i) $F(U \times V) \subset B$, (ii) tout polynôme P se laisse mettre dans $U \times V$ sous la forme

$$P(x) = \sum \Phi_l(y, \varepsilon) e_l(x), \quad y = f_\varepsilon(x). \qquad (*)$$

Le lemme de Hadamard permet de décomposer les fonctions Φ_l dans B comme suit :

$$\Phi_l(y, \varepsilon) = c_l(\varepsilon) + \sum_l y_l \Phi_{l, l}(y, \varepsilon).$$

Portons ces décompositions dans (*) : nous obtenons pour tout polynôme P dans $U \times V$ la représentation

$$P(x) = \sum c_l(\varepsilon) e_l(x) + \sum h_j(x, \varepsilon) y_j, \quad y_j = f_{\varepsilon, j}(x), \qquad (**)$$

où les h_j sont holomorphes dans $U \times V$.

La seconde somme appartient à l'idéal $I_{f_\varepsilon}(U)$. Le lemme est démontré.

Remarque. La combinaison linéaire de fonctions e_l, équivalente à un polynôme P modulo l'idéal, dépend holomorphiquement du paramètre ε.

La proposition 2 découle du lemme 3.

5.8. Majoration du nombre de solutions d'un système d'équations. Dans ce n° nous démontrerons la proposition 3 énoncée au n° 5.7.

Lemme 1. *Supposons que la sous-algèbre polynomiale de l'application g dans U soit de C-dimension finie. Alors chaque zéro de g est de multiplicité finie.*

Démonstration. Soit a un zéro de g. Soient φ_i des fonctions linéaires qui s'annulent en a. Si la dimension de la sous-algèbre polynomiale est μ, les images dans cette sous-algèbre des $\mu+1$ polynômes $1, \varphi_1, \varphi_1 \cdot \varphi_2, \ldots, \varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu$ sont linéairement dépendantes. Par le même raisonnement que dans le lemme du n° 5.5, nous constatons qu'il existe une fonction $\rho \in A(U)$ telle que $\rho(a) \neq 0$ et $\rho\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu \in I_g(U)$. Faisons l'inversion de ρ dans l'algèbre des germes de fonctions holomorphes (et non dans celle des polynômes) au point a: alors $\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu \in I_{g,a}$. Le lemme est démontré.

Lemme 2. *Le nombre de racines distinctes du système $g=0$ dans U (sans tenir compte de leur multiplicité) est majoré par la C-dimension μ de la sous-algèbre polynomiale de g dans U.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $\mu+1$ racines $a_1, \ldots, a_\mu$. Il existe un polynôme P_i égal à 1 dans une racine a_i et à 0 dans les μ autres racines. Les images des $\mu+1$ polynômes P_i sont linéairement indépendantes dans la sous-algèbre polynomiale, ce qui contredit la condition.

Introduisons quelques notations. Soient $a_1, \ldots, a_\nu$ tous les zéros de l'application g dans U.

Définition. On appelle *algèbre multilocale* du système $g=0$ dans U la somme directe des algèbres locales des germes de g dans les points a_i.

Notation. $\Lambda_g(U) = \sum_{i=1}^{\nu} Q_{g,a_i}$.

Associons à chaque fonction de l'algèbre $A(U)$ l'ensemble de ses germes dans les points a_i. On obtient un homomorphisme de C-algèbres $A(U)$ et $\Lambda_g(U)$, homomorphisme qui sera désigné π.

Lemme 3. *Supposons que la sous-algèbre polynomiale de g dans U soit de C-dimension finie. Alors l'image de l'algèbre des polynômes par l'homomorphisme π se confond avec l'algèbre multilocale $\Lambda_g(U)$.*

Démonstration. Soient $a_1, \ldots, a_\nu$ les racines de g dans U (leur nombre est fini d'après le lemme 2). Chaque racine a_i est de multiplicité finie μ_i (d'après le lemme 1). Les fonctions qui ont

mêmes jets d'ordre μ_i en un point a_i définissent les mêmes éléments de l'algèbre locale Q_{g, a_i}. Il existe un polynôme qui possède des jets donnés à l'avance d'ordres μ_i dans un ensemble fini de points $a_1, \ldots, a_\nu$.

La proposition 3 découle du lemme 3, car l'homomorphisme π envoie l'idéal $I_g(U)$ sur 0.

5.9. Une racine isolée est de multiplicité finie. Démontrons le théorème 2 du n° 5.2.

Nous avions montré au n° 5.5 que toute racine de multiplicité finie d'un système d'équations holomorphes est isolée. Il reste à démontrer la

Proposition. *Toute racine isolée est de multiplicité finie.*

Démonstration. Soit 0 une racine isolée du système $f = 0$. Conformément à la variante locale du théorème des zéros de Hilbert, il existe un N tel que $x_j^N \in I_{f, 0}$. La proposition est démontrée.

Donnons maintenant une démonstration directe sans faire appel au théorème des zéros.

Soit B une boule située dans le domaine de convergence de la série taylorienne d'un germe f en 0. Soit 0 l'unique racine dans B du système $f = 0$.

Lemme. *Il existe pour k quelconque une application polynomiale g telle que*: (i) *les jets d'ordre k, de f et g en 0 coïncident*, (ii) *le germe de g est de multiplicité finie en* 0, (iii) $\| f \| > \| f - g \|$ *sur la sphère ∂B.*

Démonstration. Soit un g tel que $g = f_{l-1} + \varepsilon x^l$, où f_{l-1} est un polynôme taylorien de f de degré $l - 1 > k$ et x^l une application de Pham Φ^m, $m = l, \ldots, l$. 1° Le germe de g est de multiplicité finie en 0. En effet, dans la sous-algèbre polynomiale de l'application g dans $\mathbf{C}^n$ on a les relations $\varepsilon x^l = - f_{l-1}$. A l'aide de ces relations, on peut abaisser le degré de tout polynôme si son degré en une des variables est supérieur ou égal à l. Par conséquent, la sous-algèbre polynomiale est de dimension finie et chaque zéro de g est de multiplicité finie (voir n° 5.5). 2° Choisissons l, puis ε de façon à avoir $\| f \| > \| f - g \|$ sur la sphère ∂B. Le lemme est démontré.

Démonstration de la proposition. Choisissons g pour $k = \mathrm{ind}_0 [f]$.

1° Le degré de l'application $g/\| g \|$ de la sphère ∂B dans la sphère unité est égal à k (condition iii).

2° $\mathrm{ind}_0 [g] \leqslant k$ (corollaire 3 du n° 5.4).

3° $\mu_0 [g] = \mathrm{ind}_0 [g] \leqslant k$ (théorème 1 du n° 5.2).

4° Les germes de f et g sont A-équivalents en 0, vu que leur différence est d'ordre de petitesse égal ou supérieur à $k + 1$ (proposition 2 du n° 5.5). Par conséquent, le germe de f est de multiplicité finie en 0.

5.10. Algèbre multilocale de la racine décomposée. Dans les nos 5.3 à 5.8 nous avons vérifié toutes les propositions qui avaient servi à démontrer le théorème 1 au n° 5.2. Ces propositions offrent aussi une certaine information supplémentaire.

Soit L un espace C-vectoriel engendré par des fonctions $e_1, \ldots, e_\mu$ dont les germes en 0 forment une base de l'algèbre locale de l'application f.

Théorème. *Pour toute déformation* $\{f_\varepsilon\}$ *du germe de* f, *il existe un voisinage du zéro* $U \subset \mathbf{C}^n$ *et un voisinage du zéro* V *dans l'espace des paramètres, tels que pour tout* $\varepsilon \in V$

(i) *l'application* $\pi: L \to \Lambda_{f_\varepsilon}(U)$ *soit un isomorphisme d'espaces vectoriels* ;

(ii) *chaque polynôme* P *dans l'algèbre* $A(U)$ *soit équivalent modulo l'idéal* $I_{f,\varepsilon}(U)$ *à un élément unique de* L, *l'élément en question dépendant analytiquement de* ε.

Démonstration. (i) découle du fait que l'application $\pi: L \to \Lambda_{f_\varepsilon}(U)$ d'espaces de même dimension est surjective (puisque la sous-algèbre polynomiale est appliquée « sur » et que chaque polynôme est congru à un élément de L). L'unicité dont il est question en (ii) découle de (i) et la dépendance holomorphe, de la remarque 1 du n° 5.7.

Problème. L'isomorphisme $\pi: L \to \Lambda_{f_\varepsilon}(U)$ définit sur l'espace vectoriel L une structure d'algèbre qui dépend du paramètre ε. Montrer que cette structure dépend holomorphiquement de ε (i.e. qu'un produit de deux éléments de L dépend holomorphiquement de ε).

5.11. Formes bilinéaires sur l'algèbre locale. Soit $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ une application de multiplicité $\mu < \infty$, et soit Q_f son algèbre locale. Nous allons définir sur Q_f une famille de formes symétriques bilinéaires et montrer qu'elles sont non dégénérées.

Soit un jacobien $J = \det(\partial f/\partial x)$ calculé dans un système de coordonnées quelconque. La classe du jacobien dans Q_f sera notée également par J et appelée jacobien.

Théorème 1. *Le jacobien n'appartient pas à l'idéal* I_f.

Soit une forme linéaire $\alpha: Q_f \to \mathbf{C}$. Définissons sur Q_f une forme bilinéaire B_α telle que

$$B_\alpha(g, h) = \alpha(g \cdot h).$$

Théorème 2. *La forme bilinéaire* B_α *est non dégénérée si et seulement si* α *ne s'annule pas sur* J.

On appelle *annulateur* d'un idéal I et l'on note ann I l'ensemble de tous les g tels que $gi = 0$ pour tout $i \in I$. L'annulateur d'un idéal est lui-même un idéal.

Corollaire 1. *Si $\alpha(J) \neq 0$, l'annulateur d'un idéal dans Q_f est son complémentaire orthogonal par rapport à la forme B_α.*

Démonstration. 1° Si $ai = 0$, alors $B_\alpha(a, i) = 0$. 2° Si $B_\alpha(a, i) = 0$ pour tout $i \in I$ mais $ai_0 \neq 0$, alors, puisque la forme B_α est non dégénérée, il existe un c tel que $B_\alpha(ai_0, c) \neq 0$. Or, $B_\alpha(ai_0, c) = B_\alpha(a, i_0c) = 0$, car $i_0c \in I$.

Corollaire 2. ann (ann I) $= I$.

Démonstration. $(I^\perp)^\perp = I$.

La démonstration des théorèmes 1 et 2 utilise une forme spéciale $B = B_{\alpha_0}$.

Soit Q une algèbre de fonctions sur μ points a_i. Prenons une forme linéaire l sur Q, $l(h) = \sum \varphi(a_i) h(a_i)$, construite à partir de la « fonction poids » φ. Définissons sur Q une forme bilinéaire $B(h, g)$ telle que $B(h, g) = l(h \cdot g)$. Cette forme est non dégénérée si la fonction poids ne s'annule en aucun point a_i.

L'algèbre locale Q_f est une algèbre de fonctions sur μ points identifiés. Il se trouve qu'on peut choisir le poids φ de telle façon que la forme B définie sur Q admette comme limite, par l'identification des points, une forme complètement déterminée et de surcroît non dégénérée sur Q_f. Pour qu'il en soit ainsi, φ doit tendre vers ∞ lors de l'identification des points, sans quoi la forme limite sera dégénérée. Comme φ, il suffit de prendre $1/J$, où J est le jacobien de f.

La racine 0 du système $f = 0$ se décompose en μ racines du système $f = \varepsilon$, où ε est une petite valeur régulière. Soient $a_1, \ldots, a_\mu$ ces racines. Pour une fonction arbitraire h, holomorphe en 0, posons

$$l^\varepsilon(h) = \sum h(a_i)/J(a_i).$$

Proposition 1. *Quand la valeur régulière ε tend vers zéro, $l^\varepsilon(h)$ tend vers une limite finie.*

Cette limite sera notée $[h/f]$.

Exemple 1. Pour la fonction $h = gJ$ on a $[h/f] = \mu g(0)$.

Proposition 2. *Une forme linéaire $\alpha_0(\cdot) = [\cdot/f]$ s'annule sur l'idéal I_f et définit donc une forme linéaire sur l'algèbre locale Q_f.*

Proposition 3. *Une forme bilinéaire $B = B_{\alpha_0}$ construite sur l'algèbre locale à partir d'une forme linéaire $\alpha_0(\cdot) = [\cdot/f]$ est non dégénérée.*

Les propositions 1 à 3 seront démontrées dans les n°s 5.14 à 5.18. A présent nous en déduirons les théorèmes 1 et 2.

Démonstration du théorème 1. $[J/f] = \mu \neq 0$. Par conséquent $J \notin I_f$ (proposition 2).

Démonstration du théorème 2. Toute forme linéaire α sur Q_f peut s'écrire $\alpha(\cdot) = B(\cdot, \alpha^*)$ (car la forme B est non dégénérée). Aussi $B_\alpha(h, g) = B(h, g\alpha^*)$. La forme $B(h, g\alpha^*)$

est non dégénérée si et seulement si l'élément α^* est inversible. Or, $\alpha(J) = B(J, \alpha^*) = \mu\alpha^*(0)$ (exemple 1), d'où il ressort que α^* est inversible si et seulement si $\alpha(J) \neq 0$.

Corollaire 3. *L'idéal engendré par le jacobien dans Q_f est de dimension* 1 *et indépendant du système de coordonnées adopté pour la définition du jacobien. Cet idéal est contenu dans tout idéal non nul de l'algèbre Q_f.*

D é m o n s t r a t i o n. L'égalité de l'exemple 1 montre que l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est le B-complément orthogonal de la droite λJ. La droite en question est donc un idéal défini intrinsèquement, à savoir l'annulateur de l'idéal maximal (corollaire 1). Pour un idéal I non nul on a l'inclusion $I^\perp \subseteq \mathfrak{m}$ et donc l'inclusion $\mathfrak{m}^\perp \subseteq I$.

Remarque. Le symbole $[h/f]$ admet une *représentation intégrale*

$$[h/f] = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int \frac{h\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n},$$

où l'intégration s'étend à un petit cycle défini par les équations $|f_k|^2 = \delta_k$ (voir nº 5.18). On peut prendre cette formule comme définition du symbole et, en partant de cette définition, démontrer les propriétés du symbole, de même que les théorèmes 1 et 2.

5.12. Indice du point singulier d'un germe réel. Soit $f: (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ une application analytique réelle de multiplicité $\mu < \infty$, et soit Q_f la $\mathbf{R}$-algèbre locale de f. Choisissons des orientations dans les deux $\mathbf{R}^n$ et désignons par J le jacobien calculé en coordonnées adaptées à l'orientation.

Prenons une forme arbitraire $\alpha: Q_f \to \mathbf{R}$. Définissons sur Q_f une forme bilinéaire B_α telle que $B_\alpha(g, h) = \alpha(g \cdot h)$.

Théorème (formule de signature). *La signature de la forme bilinéaire B_α est égale à l'indice du point singulier* 0 *du germe de f si* $\alpha(J) > 0$.

Ce théorème se démontre par passage à la limite, en partant de la proposition ci-après sur les fonctions sur un ensemble fini avec involution.

Une fonction à valeurs complexes sur un ensemble à involution τ est appelée *fonction τ-réelle* si $\varphi(\tau a) = \overline{\varphi(a)}$ (un polynôme à coefficients réels est τ-réel pour l'involution de la conjugaison complexe). Toutes les fonctions τ-réelles sur un ensemble de μ points forment une $\mathbf{R}$-algèbre R de $\mathbf{R}$-dimension μ. Pour toute fonction $\varphi \in R$, définissons une forme bilinéaire B_φ sur R, telle que $B_\varphi(h, g) = \sum \varphi(a_i) h(a_i) g(a_i)$. Supposons que φ ne s'annule en aucun point a_i.

Proposition 1. (i) *Toutes les valeurs de B_φ sont réelles.* (ii) *La forme B_φ est non dégénérée.* (iii) *La signature de B_φ est $\varphi^+ - \varphi^-$, où*

φ^+ *est le nombre des points invariants par involution sur lesquels* $\varphi > 0$ *et* φ^- *le nombre des points invariants par involution sur lesquels* $\varphi < 0$.

Démonstration. L'ensemble se décompose par involution en sous-ensembles invariants constitués de un ou deux points chacun. Il suffit donc de démontrer la proposition pour les ensembles à un ou deux points, pour lesquels elle se laisse vérifier immédiatement.

Démontrons la formule de signature pour une forme bilinéaire spéciale B. La racine 0 du système $f = 0$ se décompose en μ racines complexes du système $f = \varepsilon$, où ε est une petite valeur régulière. Soient $a_1, \ldots, a_\mu$ ces racines. Sur l'ensemble de ces racines opère l'involution de passage au conjugué complexe. Fixons μ polynômes réels $e_1, \ldots, e_\mu$ qui définissent une **R**-base de l'algèbre locale $\mathbf{R}\,\{x\}/(f)$ et donc une **C**-base de l'algèbre $\mathbf{C}\,\{x\}/(f)$. Soient $L_\mathbf{R}$ et L les espaces de leurs combinaisons **R**-linéaires et **C**-linéaires. Soit sur $L_\mathbf{R}$ une forme bilinéaire B^ε telle que

$$B^\varepsilon(g, h) = \sum \frac{g(a_i)\, h(a_i)}{J(a_i)}.$$

Lemme 1. *La signature de la forme B^ε est égale au nombre algébrique de racines réelles du système $f = \varepsilon$ compte tenu du signe du jacobien.*

Corollaire. *La signature de la forme B^ε est égale à l'indice du point* 0 *de l'application f* (voir la proposition 1 du n° 5.3).

Le lemme 1 découle de la proposition 1 et du

Lemme 2. *Les restrictions des fonctions de $L_\mathbf{R}$ à l'ensemble des racines complexes $(a_1, \ldots, a_\mu)$, et elles seules, sont τ-réelles pour l'involution τ de passage au conjugué complexe.*

Démonstration. Que les restrictions soient τ-réelles est évident. Il suffit donc de montrer que l'application de l'espace $L_\mathbf{R}$ de dimension μ dans l'espace μ-dimensionnel des fonctions τ-réelles n'a pas de noyau. Or, pour l'application de restriction des fonctions de L à l'ensemble $(a_1, \ldots, a_\mu)$, 0 est le seul point qui a pour image 0 (n° 5.10). Le lemme 2 est démontré.

Faisons tendre ε vers 0. La forme B^ε tend alors vers une forme complètement déterminée B qui correspond à une forme linéaire $\alpha_0(\cdot) = [\cdot/f]$ (propositions 1, 2 du n° 5.11). La forme limite B est non dégénérée, puisque sa complexifiée est non dégénérée (proposition 3 du n° 5.11). Sa signature, de même que celle de la forme non limite B^ε, est donc égale à l'indice du germe de f en 0. Nous avons démontré ainsi la formule de signature pour une forme linéaire spéciale α_0 (remarquons que $\alpha_0(J) = \mu > 0$).

Soit maintenant α une forme linéaire arbitraire, positive sur le jacobien, sur la **R**-algèbre locale. Joignons α à α_0 par un segment

dans le demi-espace des formes linéaires positives sur le jacobien. Aux points du segment correspondent des formes bilinéaires non dégénérées (théorème 2 du nº 5.11). Elles sont donc de même signature.

Remarque. Dans [25] la formule de signature est utilisée pour majorer l'indice d'un point singulier d'un champ de vecteurs homogène dans $\mathbf{R}^n$ à l'aide du degré des composantes du champ. Dans [170], la formule de signature établie dans la proposition 1 a permis de majorer l'indice total des points singuliers d'un champ polynomial dans un domaine de $\mathbf{R}^n$, défini par l'inégalité polynomiale $P > 0$, à l'aide des degrés des composantes du champ et du polynôme P (la formule de signature est appliquée de la même façon que dans le lemme 2). Les bornes obtenues sont exactes. Elles généralisent les inégalités de Petrovski-Oleïnik [232] connues en géométrie algébrique réelle.

5.13. Théorème du jacobien inverse. Soit $U \subset \mathbf{C}^n$ un domaine borné à bord, et soit $f\colon U \to \mathbf{C}^n$ une application holomorphe. Supposons que le système $f = 0$ admette des racines dans U et que l'image du bord $f(\partial U)$ ne contienne pas le point 0. Soit V composante connexe de 0 dans $\mathbf{C}^n \setminus f(\partial U)$. Le nombre de racines du système $f - y = 0$ dans U, compte tenu de leur multiplicité, est le même pour tout y de V (ce qui ressort de la proposition 3 du nº 5.4). Soit $J = \det(\partial f/\partial x)$, et soit h une fonction holomorphe dans U.

Théorème (du jacobien inverse). *Il existe dans V une fonction holomorphe φ et une seule telle que pour toute valeur régulière y on ait $\varphi(y) = \sum h(a_i)/J(a_i)$, où la sommation s'étend à l'ensemble des racines a_i du système $f - y = 0$ dans U.*

La démonstration de ce théorème, fondée sur la variante multidimensionnelle du théorème de la trace d'Abel, sera donnée au nº 5.18. Utilisons ce théorème.

Supposons que l'application f admette dans la boule B un zéro unique, au centre a de B, et supposons que la fonction h soit holomorphe dans B.

Corollaire 1. *Soient a_i les racines du système $f = \varepsilon$ dans B. Quand la valeur régulière ε tend vers 0, la fonction*

$$\varphi(\varepsilon) = \sum h(a_i)/J(a_i)$$

a une limite.

Définition. On appelle *symbole* $[h/f]_a$ la limite du corollaire 1. Soient $\{f_\varepsilon\}$ une déformation de f et $\{h_\varepsilon\}$ une déformation de h.

Corollaire 2. *Supposons que ε tende vers 0 de telle façon que toutes les racines a_i du système $f_\varepsilon = 0$ dans la boule B restent non dégénérées.*

Alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum h_\varepsilon (a_i)/\det (\partial f_\varepsilon/\partial x) (a_i) = [h/f]_a.$$

Ce corollaire se démontre en utilisant le corollaire 1 pour une application F: $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$ et une fonction H telles que $F(x, \varepsilon) = (f_\varepsilon(x), \varepsilon)$ et $H(x, \varepsilon) = h_\varepsilon(x)$.

Revenons à la situation du théorème du jacobien inverse.

Corollaire 3. *La fonction* $\varphi(y) = \sum [h/f]_{a_i}$ *est analytique dans* V. *La sommation s'étend à l'ensemble des racines du système* $f - y = 0$ *(dans* U.*)*

D é m o n s t r a t i o n. Prenons une valeur régulière de l'application proche de y. Cette valeur a pour images réciproques des groupes de valeurs voisines des racines a_i. Faisons tendre la valeur régulière vers y. En passant à la limite dans chaque groupe, nous verrons que la fonction holomorphe φ du théorème est $\sum [h/f]_{a_i}$.

Du théorème du jacobien inverse on déduit la *formule d'Euler Jacobi*. Soit f une application polynomiale de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ dont les composantes f_i sont des polynômes de degré m_i. Soit f_0: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ une application polynomiale dont les composantes sont les composantes homogènes dominantes des f_i. Supposons que le système $f = 0$ n'admette dans $\mathbf{C}^n$ que des racines simples a_i et que l'unique racine du système $f_0 = 0$ soit le point 0.

Corollaire 4 (formule d'Euler-Jacobi). *Pour tout polynôme* h *de degré inférieur à celui du jacobien* J ($\deg h < m_1 + \ldots + m_n - - n$) *on a l'identité*

$$\sum h(a_i)/J(a_i) = 0.$$

D é m o n s t r a t i o n. Assimilons $\mathbf{C}^n$ au plan de coordonnée $x_{n+1} = 0$ dans $\mathbf{C}^{n+1}$. Soient $\tilde{f}_i$, $\tilde{h}$ des polynômes homogènes dans $\mathbf{C}^{n+1}$ tels que $\tilde{f}_i(x, 1) = f_i(x)$, $\tilde{h}(x, 1) = h(x)$ et $\deg \tilde{f}_i = \deg f_i$, $\deg \tilde{h} = \deg h$. Soit une application P: $(\mathbf{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbf{C}^{n+1}, 0)$ de composantes $P_i = \tilde{f}_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $P_{n+1} = x_{n+1}$. Le point $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ est l'unique racine du système $P = 0$. Les racines du système $P = (0, \varepsilon)$, où $(0, \varepsilon) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^1$, sont des points de la forme $b_i = (a_i\varepsilon, \varepsilon)$, où a_i est racine du système $f = 0$. En chaque b_i on a

$$\tilde{h}(b_i)/\det (\partial P/\partial \tilde{x}) (b_i) = \varepsilon^p h(a_i)/J(a_i),$$

où $p = \deg h - (m_1 + \ldots + m_n - n)$ et $\tilde{x}$ sont les coordonnées $x_1, \ldots, x_{n+1}$ dans $\mathbf{C}^{n+1}$. En faisant la somme suivant toutes les racines, nous obtenons

$$\sum \tilde{h}(b_i)/\det (\partial P/\partial \tilde{x}) (b_i) = \varepsilon^p \sum h(a_i)/J(a_i).$$

D'après le corollaire 1, la somme de gauche doit admettre une limite finie quand $\varepsilon \to 0$. Pour $p < 0$ cela n'est possible que si $\sum h(a_i)/J(a_i) = 0$.

Remarque 1. La formule d'Euler-Jacobi reste vraie si au lieu des polynômes h, f de degré fixé on prend des polynômes de quasi-degré fixé. On trouve d'autres généralisations de la formule d'Euler-Jacobi dans [132], [147].

Remarque 2. La formule d'Euler-Jacobi explique en partie l'existence de la limite dans le corollaire 1. Soit f une application polynomiale et soit h un polynôme tel que $\deg h < \deg J$. Supposons que le système $f = 0$ admette exactement une racine multiple 0 plus quelques racines simples. Supposons en outre que ce système n'admette aucune « racine à l'infini ». Alors, en faisant tendre la valeur régulière ε vers zéro, une partie des racines tendront vers le point 0, et les autres vers des racines simples b_i. Il ressort alors de la formule d'Euler-Jacobi que la limite dans le corollaire 1 existe et est égale à $-\sum h(b_i)/J(b_i)$.

Remarque 3. La formule d'Euler-Jacobi est usitée en géométrie algébrique réelle (voir [232], [170]).

5.14. Propriétés du symbole $[h/f]_a$.

Proposition 1. *Soient g_a, f_a deux germes A-équivalents,* $g(\cdot) = A(\cdot)f(\cdot)$. *Alors*

$$[h/f]_a = [h \cdot \det A/g]_a.$$

D é m o n s t r a t i o n. Soient $f - \varepsilon$ une déformation de f et $g_\varepsilon = A(f - \varepsilon)$ une déformation de g. Elles ont mêmes zéros a_i dans une petite boule. En chaque a_i on a $(\partial g_\varepsilon/\partial x)(a_i) = A(a_i) \times (\partial f/\partial x)(a_i)$. Donc

$$\sum h(a_i)/\det(\partial f/\partial x)(a_i) = \sum h(a_i)\det A(a_i)/\det(\partial g_\varepsilon/\partial x)(a_i).$$

En faisant tendre la valeur régulière ε vers 0, on obtient l'égalité cherchée.

Proposition 2. *Si $h \in I_{f,a}$, alors* $[h/f]_a = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. 1° Supposons en outre que les différentielles df_k de toutes les composantes f_k n'aient pas de zéros dans un voisinage pointé de a. Soit $h = \sum g_k f_k$. Montrons que le symbole $[g_k f_k/f]_a$ s'annule pour tout k. L'hypersurface $f_k = 0$ n'a aucune singularité dans un voisinage pointé de a (par hypothèse). Les racines a_i du système $f_j = \varepsilon_j$ pour $\varepsilon_k = 0$ sont situées sur l'hypersurface $f_k = 0$. Pour des ε génériques (avec $\varepsilon_k = 0$) toutes les racines sont non singulières, et chaque terme de la somme $\sum (g_k f_k)(a_i)/J(a_i)$ s'annule. En passant à la limite, nous obtenons l'égalité cherchée.

2° Tout germe g de multiplicité finie est A-équivalent à un germe f si f vérifie l'hypothèse supplémentaire formulée en 1°. Pour la démonstration, il suffit de poser $f_i = \tilde{g}_i + (x_1^N + \ldots + x_n^N)$, où $\tilde{g}_i$ est le polynôme taylorien de degré $N - 1$ de la composante g_i voir 1° du lemme du n° 5.9) et N est suffisamment grand ($N > > \mu_a [g]$) (voir la proposition 2 du n° 5.5).

3° Soit $g = Af$. Supposons que f vérifie l'hypothèse de 1° et que $h \in I_{g, a}$. Alors $[h/g]_a = [h \cdot \det A/f]_a = 0$, car $h \cdot \det A \in I_{g, a} = I_{f, a}$.

5.15. La forme bilinéaire est non dégénérée. Le symbole $[h/f]_a$ ne dépend que de l'image de h dans l'algèbre $Q_{f, a}$ (proposition 2 du n° 5.14) et définit donc une fonction linéaire sur l'algèbre $Q_{f, a}$. Dans ce n° nous considérerons la forme bilinéaire B sur l'algèbre locale d'un germe de multiplicité finie, construite à partir de cette fonction linéaire.

Proposition 1. *En se décomposant, une racine de multiplicité finie de forme bilinéaire non dégénérée n'engendre que des racines de formes non dégénérées.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient f un germe de multiplicité finie en a et L un espace C-vectoriel engendré par les fonctions $e_1, \ldots, e_\mu$ dont les germes forment une base dans l'algèbre locale de f. Soient $\{f_\varepsilon\}$ une déformation de f et U un voisinage suffisamment petit de a. La projection canonique $\pi : L \to \Lambda_{f_\varepsilon}(U)$ de l'espace L dans l'algèbre multilocale du système $f_\varepsilon = 0$ (ε petit) est un isomorphisme (théorème du n° 5.10). Considérons sur L une forme bilinéaire B^ε telle que

$$B^\varepsilon(g, h) = \sum [g \cdot h/f]_{a_i},$$

où la sommation s'étend à toutes les racines du système $f_\varepsilon = 0$ dans le domaine U. Cette forme est la somme directe des formes bilinéaires associées aux racines a_i. La matrice $A^\varepsilon = \{B(e_i, e_j)\}$ de la forme B^ε dépend analytiquement de ε d'après le corollaire 3 (n° 5.13). Par définition, la forme bilinéaire du germe f est non dégénérée, i.e. $\det A^0 \neq 0$. Donc $\det A^\varepsilon \neq 0$ pour $|\varepsilon|$ petits. Pour de tels ε, la forme bilinéaire de toute racine est non dégénérée.

Proposition 2. *La forme bilinéaire d'un germe d'application de Pham est non dégénérée.*

D é m o n s t r a t i o n. Faisons le calcul suivant. L'algèbre locale d'une application de Pham Φ^m est engendrée par des monômes $x^k = x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$, $0 \leqslant k_1 < m_1, \ldots, 0 \leqslant k_n \leqslant m_n$. Un monôme x^r, où $r = m_1 - 1, \ldots, m_n - 1$, est proportionnel au jacobien de l'application de Pham. Pour ce monôme $[x^r/\Phi^m] = 1$. Pour

les autres générateurs x^k de l'algèbre locale on a $[x^k/\Phi^m] = 0$: cela ressort de la formule d'Euler-Jacobi. La forme bilinéaire du germe de l'application de Pham est non dégénérée: la duale de la base $\{x^k\}$ dans Q_{Φ^m} est la base $\{x^{r-k}\}$.

Proposition 3. *La forme bilinéaire de tout germe de multiplicité finie est non dégénérée.*

D é m o n s t r a t i o n. Deux germes A-équivalents ont leurs formes bilinéaires dégénérées ou non dégénérées simultanément (ce qui ressort de la proposition 1 du n° 5.14). Tout germe de multiplicité finie peut être obtenu, à une A-équivalence près, par une petite déformation d'un germe d'application de Pham (n° 5.6). Or, sa forme bilinéaire est non dégénérée: la proposition 3 résulte maintenant de la proposition 1.

5.16. Théorème de la trace. Soit une application f de variétés complexes de même dimension par laquelle tout point admet un nombre fini d'images réciproques. Soit ω une k-forme dans la variété source.

Définition. On appelle *trace* de la k-forme ω par l'application f une k-forme dans la variété but dont la valeur sur chaque k-vecteur est égale à la somme des valeurs de ω sur toutes les images réciproques de ce k-vecteur. Cette forme est définie pour les valeurs régulières de f. Elle se note Tr ω.

Théorème (Abel). *Soient $f(x) = x^p$ et $\omega = g\,dx$, où g est une fonction holomorphe en* 0. *Alors la forme* Tr ω *définie dans un voisinage pointé de* 0 *se laisse prolonger de façon holomorphe en* 0.

D é m o n s t r a t i o n. $\mathrm{Tr}\,\omega = \varphi\,dy$, où $\varphi(y) = \sum g(y^{1/p}) \times \frac{1}{p} y^{(1/p)-1}$. Développons φ en série suivant les puissances de $y^{1/p}$. Les coefficients des puissances non entières de y sont nuls, car φ est univoque. Le développement ne contient aucune puissance entière négative de y, car tout terme du développement est de degré non inférieur à $(1/p) - 1$.

Corollaire 1. *Soit f un revêtement ramifié de dimension* 1 *à μ feuillets. La trace d'une forme holomorphe dans l'espace source se prolonge alors de façon holomorphe en une forme dans l'espace but.*

Dans le cas multidimensionnel, le théorème de la trace s'obtient à l'aide d'une

Définition. Une application f de variétés complexes de même dimension est de *type fini* si la somme des multiplicités de toutes les images réciproques de chaque point a une valeur constante finie. Cette valeur μ s'appelle *nombre de feuillets* de la projection de revêtement $f: M \to N$ de type fini de M *au-dessus de* N.

Proposition. *Toute application de type fini est propre.*

Démonstration. Un point y admet μ images réciproques (compte tenu de leur multiplicité). Tout point suffisamment proche de y admet μ images réciproques (compte tenu de leur multiplicité) proches de celles de y. Donc il n'y a aucune autre image réciproque, et l'application est propre.

Corollaire 2. *Les valeurs régulières d'une application de type fini forment un ensemble ouvert et partout dense.*

Théorème. *La trace d'une forme holomorphe par une application de type fini a un prolongement holomorphe sur la variété but tout entière.*

Démonstration. Elle se déduit du théorème d'Abel:

1° Pour l'application $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^\mu, x_2, \ldots, x_n)$ le théorème se démontre comme le théorème d'Abel.

2° On dit qu'un point de la variété source est *bon* si l'on peut introduire sur son voisinage et sur celui de son image des coordonnées en lesquelles l'application s'écrive comme dans 1°.

Un point de la variété but est *bon* si chaque son image réciproque est un bon point.

Dans un voisinage d'un bon point le théorème découle de 1°.

3° Les mauvais points de la variété source forment un ensemble de codimension supérieure à 1. Pour la démonstration, considérons dans la variété source les trois ensembles suivants:

— l'ensemble des singularités de l'ensemble des points critiques de l'application f;

— l'ensemble des points critiques de la restriction de f à la partie non singulière de l'ensemble de ses points critiques;

— l'ensemble des points critiques de f en lesquels la multiplicité est plus élevée que dans les points critiques voisins.

On montre sans peine que, pour une application de type fini, chacun de ces ensembles est de codimension supérieure à 1 et que tous les autres points sont bons.

4° Les mauvais points forment un ensemble analytique dans la variété source; ceux de la variété but forment donc un ensemble analytique eux aussi (théorème de Remmert) de codimension supérieure à 1.

5° D'après le théorème de Hartogs, la trace admet un prolongement holomorphe sur l'ensemble des mauvais points.

Dans le texte qui suit, nous donnerons une autre démonstration du théorème de la trace, sans faire appel aux théorèmes de Remmert et de Hartogs.

5.17. Représentation intégrale de la trace. Soit $f: M \to V$ une application de type fini sur un domaine V de $\mathbf{C}^n$, et soit ω une n-forme holomorphe dans M. Munissons $\mathbf{C}^n$ de coordonnées $y_1, \ldots$

$\ldots, y_n$. Définissons la fonction $[\mathrm{Tr}\,\omega]$ en valeurs régulières de l'application comme coefficient de la représentation

$$\mathrm{Tr}\,\omega = [\mathrm{Tr}\,\omega]\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n.$$

Considérons l'application $|f|^2\colon M \to \mathbf{R}^n$, $x \mapsto (|f_1(x)|^2, \ldots, |f_n(x)|^2)$.

Soit δ un vecteur positif de $\mathbf{R}^n$. Soient un polydisque V_δ tel que $|y_k|^2 < \delta_k$, de squelette T_δ tel que $|y_k|^2 = \delta_k$.

Théorème. *Soit δ une valeur non critique de l'application $|f|^2$ telle que le polydisque V_δ soit contenu dans V avec son squelette. La fonction $[\mathrm{Tr}\,\omega]$ admet alors dans V_δ une représentation intégrale*

$$[\mathrm{Tr}\,\omega](y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{\omega}{\prod (f_i - y_i)} \qquad (*)$$

dans laquelle Γ_δ est un cycle tel que $|f|^2 = \delta$.

Introduisons sur M une n-forme méromorphe dépendant d'un point y de V, telle que $\omega_y = \omega/[(2\pi i)^n \prod (f_i - y_i)]$.

Définissons une application $|f - y|^2\colon M \to \mathbf{R}^n$ dépendant du paramètre $y \in V$, telle que $x \mapsto (|f_1 - y_1|^2, \ldots, |f_n - y_n|^2)$. L'image réciproque d'une valeur régulière $\rho \in (\mathbf{R}^+)^n$ pour y et ρ suffisamment petits est une variété compacte. Désignons-la par $\Gamma_{y,\rho}$.

Lemme 1. *Au voisinage d'une valeur régulière de l'application f on a*

$$[\mathrm{Tr}\,\omega] = \int\limits_{\Gamma_{y,\rho}} \omega_y$$

(pour tout vecteur suffisamment petit ρ aux composantes positives).

D é m o n s t r a t i o n. L'image réciproque d'un petit voisinage W d'une valeur régulière se compose de μ voisinages disjoints U_j. Identifions les U_j avec W au moyen de l'application f et introduisons dans U_j un système de coordonnées $f_1, \ldots, f_n$. Soit $\omega = g_j\, df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ dans U_j. Alors $[\mathrm{Tr}\,\omega] = \sum g_j$. D'autre part, pour ρ petit, le cycle $\Gamma_{y,\rho}$ se décompose en μ tores T_j situés dans les voisinages U_j (et définis sur les U_j par les n équations $|f_i - y_i|^2 = \rho_i$). D'après la formule intégrale de Cauchy

$$g_j(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T_j} \frac{g_j(f_1, \ldots, f_n)\, df_1 \wedge \ldots \wedge df_n}{\prod (f_i - y_i)}.$$

Dans nos notations cette égalité s'écrit $g_j(y) = \int\limits_{T_j} \omega_y$. Donc

$$\int\limits_{\Gamma_{y,\rho}} \omega_y = \sum g_j(y).$$ Le lemme est démontré.

Lemme 2. *Pour toute valeur régulière y de l'application f suffisamment proche de 0, le cycle $\Gamma_{y,\rho}$ est, pour ρ petit ($|\rho| < \rho_0(y)$), homologue au cycle Γ_δ dans le complémentaire de l'ensemble des singularités de la forme ω_y.*

Démonstration. Elle utilise le fait que les images réciproques d'une valeur régulière par deux applications différentiables propres homotopes sont homologues.

1° Le cycle Γ_δ est défini par un système d'équations non dégénéré. Une légère variation de ces équations n'entraîne qu'une variation insignifiante du cycle. Pour tout y appartenant à un voisinage W_0 suffisamment petit de 0, les cycles $\Gamma(t) = \Gamma_{ty,\delta}$ définissent une homotopie différentiable entre Γ_δ et $\Gamma_{y,\delta}$ quand t varie de 0 à 1. D'une façon analogue, pour un $y \in W_0$ et un $\rho \in \mathbf{R}^n$ suffisamment petit ($|\rho| < \rho_0(y)$), les cycles $\Gamma(t) = \Gamma_{y,\delta+t\rho}$ définissent une homotopie différentiable entre $\Gamma_{y,\delta}$ et $\Gamma_{y,\delta+\rho}$.

2° Soit une application $M \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ dépendant du paramètre $y \in V$, par laquelle le point (x, t) est envoyé dans un point de coordonnées $|f_i(x) - y_i|^2 - t\delta_i$. Soit ρ une valeur régulière de cette application, suffisamment petite pour que $|\rho| < \rho_0(y)$ et que le cycle $\Gamma_{y,\rho}$ se décompose en μ tores T_j (voir lemme 1). L'image réciproque de ρ définit dans $M \times \mathbf{R}$ une variété différentiable de dimension $n + 1$. La projection dans M de la partie définie par $0 \leqslant \leqslant t \leqslant 1$ de cette variété est une bande tendue entre les cycles $\Gamma_{y,\delta}$ et $\Gamma_{y,\rho} = \sum T_j$. Le lemme est démontré, car ni la bande construite, ni les homotopies exhibées n'effleurent les singularités de la forme ω_y.

Démonstration du théorème. 1° La représentation (*) vaut pour y petits. En effet, d'après les lemmes 1 et 2 on a pour y petit

$$\int\limits_{\Gamma_\delta} \omega_y = \int\limits_{\Gamma_{y,\rho}} \omega_y = [\mathrm{Tr}\,\omega](y).$$

2° De 1° on déduit le théorème de la trace pour les n-formes.

3° Du théorème de la trace il ressort que $[\mathrm{Tr}\,\omega]$ admet un prolongement holomorphe sur V tout entier ; le second membre de (*) est holomorphe dans le polycylindre V_δ. D'après 1° le premier et le second membres se confondent au voisinage de 0 : par conséquent, ils se confondent dans V_δ.

Corollaire. *Il existe une représentation intégrale pour la trace des k-formes dans un espace de dimension n.*

Considérons par exemple la trace d'une 1-forme ω dans $\mathbf{C}^2$,

$$\mathrm{Tr}\,\omega = a_1\,dy_1 + a_2\,dy_2.$$

Multiplions par dy_2. Il vient

$$a_1\,dy_1 \wedge dy_2 = (\mathrm{Tr}\,\omega) \wedge dy_2 = \mathrm{Tr}\,(\omega \wedge f^*\,dy_2).$$

Le coefficient a_1 a comme représentation intégrale celle de Tr ($\omega \wedge \wedge f^* dy_2$).

On établit d'une façon analogue des représentations intégrales pour les coefficients de l'expression en coordonnées de la trace d'une k-forme dans $\mathbf{C}^n$.

Remarque. Une autre démonstration du théorème de la trace est proposée dans [131], où l'on trouve aussi des renseignements sur le domaine d'application et les généralisations de ce théorème.

5.18. Démonstration du théorème du jacobien inverse. Soient un domaine $f^{-1}(V) = M$ et son application $f|_M: M \to V$. L'application est de type fini. Considérons une n-forme $\omega = h\, dx_1 \wedge \ldots \ldots \wedge dx_n$. Sur l'ensemble des valeurs régulières de l'application, qui est ouvert et dense dans V, on a $[\mathrm{Tr}\,\omega] = \sum h(a_i)/J(a_i)$. D'après le théorème de la trace, la fonction $[\mathrm{Tr}\,\omega]$ est holomorphe dans V. Le théorème est démontré.

Corollaire.

$$[h/f] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|f_i| = \delta_i} \frac{h\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n}.$$

D é m o n s t r a t i o n. $[h/f] = \lim\limits_{y \to 0} [\mathrm{Tr}\,\omega(y)] = [\mathrm{Tr}\,\omega](0)$, et le corollaire résulte de la représentation intégrale de la trace.

§ 6. Applications stables et infinitésimalement stables

Dans ce paragraphe la question de stabilité d'un germe d'application différentiable est résolue par la méthode de linéarisation. Elle consiste à réduire la question de la stabilité ordinaire à un problème linéaire de la stabilité infinitésimale, voire à un problème linéaire encore plus simple de la V-stabilité infinitésimale. Après avoir développé la technique nécessaire, nous envisageons le cas le plus élémentaire et démontrons un théorème sur l'équivalence d'une fonction à son polynôme taylorien au voisinage d'un point critique de multiplicité finie.

6.1. Notion de stabilité infinitésimale. On dit qu'une application $f: M \to N$ est *stable* si l'orbite de f sous l'action du groupe des difféomorphismes à gauche et à droite dans l'espace $\Omega(M, N)$ des applications différentiables de M dans N contient un voisinage de l'élément f (cf. § 1, n° 1.4).

Soient X une variété et G un groupe de Lie opérant sur X. On dit qu'un point f de X est *stable* par cette action si son orbite contient un voisinage de f. L'action de G sur X définit une application différentiable de variétés de dimension finie $a: G \times X \to X$ (à un couple g, x, g fait correspondre l'image de x).

Considérons la dérivée première de a par rapport au premier argument en (e, f), où e est l'élément neutre du groupe:

$$a_{*1}|_{e,f} : T_eG \to T_fX.$$

Si cet opérateur linéaire applique l'espace tangent au groupe en e sur tout l'espace tangent en f à la variété sous-jacente, alors, d'après le théorème de la fonction implicite, l'orbite du point f contient un voisinage de f.

Définition. On dit qu'un point f est *infinitésimalement stable* (ou *inf-stable*) par l'action a si la dérivée de a par rapport au groupe en (e, f) applique l'espace tangent au groupe sur tout l'espace tangent à la variété en f, i.e. si $a_{*1}|_{e,f}$ est une surjection.

Proposons-nous d'étendre cette définition au cas envisagé, i.e. à l'action d'un groupe de difféomorphismes à gauche et à droite de dimension infinie sur un espace d'applications différentiables $\Omega(M, N)$ de dimension infinie.

L'espace tangent au groupe Diff M des difféomorphismes d'une variété différentiable M dans le point neutre de ce groupe est l'espace vectoriel des champs de vecteurs différentiables sur M. Il se note $\Gamma(TM)$ (espace des sections du fibré tangent TM de M). Un difféomorphisme infinitésimal à gauche et à droite se définit par une paire de champs de vecteurs, l'un sur M et l'autre sur N. Donc

$$T_e(\mathrm{Diff}\, M \times \mathrm{Diff}\, N) = \Gamma(TM) \oplus \Gamma(TN).$$

L'espace tangent en f à la « variété » $\Omega(M, N)$ de toutes les applications différentiables de M dans N s'identifie naturellement avec l'espace des « déformations infinitésimales » de l'application f, i.e. avec l'espace des sections du fibré vectoriel vertical f^*TN de f (fig. 39):

$$T_e\Omega(M, N) = \Gamma(f^*TN)$$

(l'élément $\Gamma(f^*TN)$ est une section du fibré vertical qui donne la vitesse de variation de f en tout point x de M).

Calculons l'opérateur linéaire

$$T_e(\mathrm{Diff}\, M \times \mathrm{Diff}\, N) \to \Gamma(f^*TN)$$

qui correspond à l'action à gauche et à droite, $f \mapsto K \circ f \circ H^{-1}$ $(K \in \mathrm{Diff}\, N,\ H \in \mathrm{Diff}\, M)$.

Il est commode de faire les calculs en coordonnées (locales). L'application f s'écrit sous la forme $y = f(x)$. Les familles de difféomorphismes à un paramètre H et K proches de l'identité s'écrivent comme suit:

$$H_\varepsilon(x) = x + \varepsilon h(x) + \ldots, \quad K_\varepsilon(y) = y + \varepsilon k(y) + \ldots$$

(les points de suspension remplacent les termes de degré supérieur à 1 en ε). Calculons $f_\varepsilon = K_\varepsilon \circ f \circ H_\varepsilon^{-1}$. Il vient

$$f_\varepsilon(x) = f(x - \varepsilon h(x)) + \varepsilon k(f(x)) + \ldots =$$
$$= f + \varepsilon\left[k(f(x)) - \frac{\partial f}{\partial x} h(x)\right] + \ldots$$

Le terme entre crochets est précisément la valeur de l'opérateur cherché sur la paire (h, k).

La réponse peut s'écrire sous la forme

$$(h, k) \mapsto \alpha[h] + \omega[k],$$

où $\alpha: \Gamma TM \to \Gamma(f^*TN)$ se définit par $\alpha[h](x) = -f_{*x}h(x)$ et $\omega: \Gamma TN \to \Gamma(f^*TN)$ par $\omega[k](x) = k(f(x))$. Les applications α

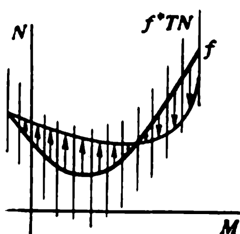


Fig. 39

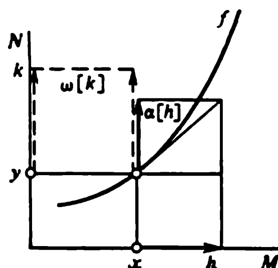


Fig. 40

et ω sont géométriques, elles sont indépendantes du choix de coordonnées (fig. 40).

Définition. Une application f est dite *infinitésimalement stable* (*inf-stable*) si

$$\alpha(\Gamma TM) + \omega(\Gamma TN) = \Gamma(f^*TN).$$

Ecrite en coordonnées, cette condition signifie que l'« équation homologique »

$$u(x) = -\frac{\partial f}{\partial x} h(x) + k(f(x)) \tag{1}$$

est résoluble en h et k pour tout champ de déformations u, i.e. pour tout élément de $\Gamma(f^*TN)$.

Théorème de stabilité (Mather). *Toute application inf-stable est stable.*

Ce théorème est vrai si M et N sont des variétés compactes ; sinon, il est vrai à condition que la stabilité soit interprétée au sens de la topologie fine de Whitney (voir p. 36). La réciproque est aussi

vraie: toute application stable est inf-stable. Tous ces résultats ont reçu leur démonstration dans les travaux de Mather [205].

Nous allons démontrer la variante locale du théorème de stabilité.

Définition. On dit qu'un germe d'application différentiable (resp. formelle, analytique, holomorphe, . . .) f en 0 est *infinitésimalement stable*, ou *inf-stable*, si l'équation homologique (1) est résoluble par rapport aux germes de champs de vecteurs différentiables (resp. formels, . . .) h et k pour tout champ de déformations différentiable (resp. formel, . . .) u.

Exemple 1. Application droite sur droite $f(x) = x^2$. L'équation homologique s'écrit

$$u(x) = -2xh(x) + k(x^2).$$

Elle est résoluble pour u quelconque. Par conséquent, l'application est inf-stable.

Exemple 2. Application droite sur droite $f(x) = x^3$. L'équation homologique s'écrit

$$u(x) = -3x^2h(x) + k(x^3).$$

Elle n'a pas de solution pour $u = x$. Donc, l'application $y = x^3$ est infinitésimalement instable (cf. fig. 1).

6.2. Méthode d'homotopie. Le théorème de stabilité d'une application infinitésimalement stable peut être démontré par des méthodes différentes, dont on se sert généralement pour la démonstration des théorèmes analogues à celui de la fonction implicite. On peut par exemple utiliser une méthode itérative, du type de la méthode des tangentes de Newton (cf. [9]). Une autre méthode, dite méthode d'homotopie, a été proposée par R. Thom. Elle consiste en ce qui suit. Il s'agit de construire H et K tels que le diagramme de passage de f à $\tilde{f}$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K} \\ M & \xrightarrow{\tilde{f}} & N \end{array}$$

soit commutatif. A cet effet, on joint f à $\tilde{f}$ par une courbe f_t en sorte que $f_0 = f$ et $f_1 = \tilde{f}$. Le diagramme commutatif cherché se décompose en un produit de diagrammes, conformément à la partition du carré commutatif en rectangles de faible hauteur Δ. A chaque rec-

tangle correspond un diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f_t} & N \\ {\scriptstyle H_\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K_\Delta} \\ M & \xrightarrow{f_{t+\Delta t}} & N \end{array}$$

Si l'on arrive à construire H_Δ et K_Δ en première approximation suivant Δ (à $o(\Delta)$ près) pour t quelconque de 0 à 1, on obtiendra le diagramme commutatif désiré en « intégrant les diagrammes infinitésimaux commutatifs partiels ».

La possibilité de construction de diagrammes infinitésimaux commutatifs partiels est précisément garantie par la condition de stabilité infinitésimale.

Afin de ne pas encombrer inutilement l'idée maîtresse de la méthode d'homotopie par les détails techniques, nous commencerons par une situation très élémentaire résumée par le « lemme de Morse » qui suit:

Théorème. *Au voisinage d'un point critique non dégénéré, toute fonction est équivalente à droite (R-équivalente) à la somme d'une forme quadratique et d'une constante.*

Démonstration. Soit $f = \sum a_k x_k^2$, $a_k \neq 0$. Il s'agit de montrer que pour toute fonction φ appartenant au cube $\mathfrak{m}^3$ de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$, le germe en 0 de la fonction $f + \varphi$ est R-équivalent au germe de f en 0.

Relions f à $f + \varphi$ par un chemin $f + t\varphi$, $t \in [0, 1]$. Nous cherchons une famille à un paramètre de difféomorphismes locaux $x \mapsto g_t(x)$ telle que

$$(f + t\varphi)(g_t(x)) \equiv f(x), \tag{1}$$
$$g_0(x) \equiv x, \quad g_t(0) \equiv 0.$$

Associons à la famille g_t un champ de vecteurs v_t qui dépend du temps t:

$$v_\tau(g_\tau(x)) = \left(\frac{d}{dt} g_t(x)\right)\Big|_{t=\tau}.$$

Dérivant (1) par rapport à t, nous obtenons une équation par rapport à v_t:

$$\varphi(g_t(x)) + v_t(g_t(x)) \cdot (f + t\varphi) \equiv 0 \tag{2}$$

(l'opération $\cdot$ est la dérivation de la fonction suivant la direction du vecteur de gauche).

Introduisons un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_m$. Désignons les composantes du champ inconnu par $v_{t,i}$, de sorte que

$$v_t = \sum v_{t,i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Le deuxième terme de la somme (2) s'écrira alors comme suit:

$$v_t(g_t(x))\cdot(f+t\varphi)=\sum_{i=1}^{n} v_{t,i}(2a_ix_i+t\varphi_{x_i})|_{g_t(x)}.$$

Les fonctions $2a_ix_i+t\varphi_{x_i}$ sont connues; désignons-les par y_i. L'équation (2) s'écrit alors comme une équation par rapport à $v_{t,i}$:

$$\sum_{i=1}^{m} y_iv_{t,i}=-\varphi \tag{3}$$

[nous omettons d'écrire l'argument $g_t(x)$, le même dans le premier et dans le second membre, vu que l'équation (2) est vérifiée identiquement suivant (x, t), donc aussi suivant $(g_t(x), t)$].

Le jacobien det $(\partial y/\partial x)$ est non nul en tout point de l'axe des t (car $\varphi_{x_i}\in \mathfrak{m}^2$). On peut donc, au voisinage de l'axe des t de l'espace de coordonnées (x, t), prendre y_i et t comme nouvelles coordonnées.

La fonction φ admet sur l'axe des t un zéro d'ordre 3. D'après le lemme de Hadamard, on peut mettre φ sous la forme

$$\varphi=\sum_i y_i\psi_i,$$

où $\psi_i(0, t)=0$. Cela nous donne la solution de (3): $v_{t,i}=-\psi_i$. Connaissant la famille des champs v_t, nous pouvons déduire $g_t(x)$ de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}g_t(x)=v_t(g_t(x)),\quad g_0(x)=x.$$

Remarquons que, puisque $v_t(0)\equiv 0$, il existe pour $t\in[0, 1]$ une solution de condition initiale x proche de 0. De plus $g_t(0)=0$. Il en résulte que g_1 est le difféomorphisme cherché. Le lemme de Morse est démontré.

Un autre exemple d'application de la méthode d'homotopie est la démonstration du théorème de Tougeron sur l'équivalence d'une fonction différentiable à un polynôme. En le démontrant par la méthode d'homotopie, on voit surgir des lemmes qui jouent également un rôle essentiel dans la démonstration du théorème de Mather.

6.3. Théorème de Tougeron sur la détermination finie d'un germe de fonction dans un point critique de multiplicité finie.

Définition. On dit qu'un point critique 0 d'une fonction différentiable $f\colon (\mathbf{R}^m, 0)\to(\mathbf{R}, 0)$ est *de multiplicité finie* si l'algèbre locale de l'application gradiente est de dimension finie, i.e. si

$$\mu=\dim_{\mathbf{R}}\mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_m]]/(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_m)<\infty.$$

La quantité μ est la *multiplicité* du point critique.

Théorème. *Au voisinage de son point critique de multiplicité finie* μ, *la fonction est R-équivalente à un polynôme, à savoir, à son polynôme taylorien de degré* $\mu + 1$.

Exemple. Pour un point critique non dégénéré on a $\mu = 1$, et la fonction est équivalente à son polynôme taylorien de degré 2 (c'est le lemme de Morse que nous avons démontré au n° 6.2). Cet exemple montre que le degré $\mu + 1$ ne peut être diminué.

Remarque. Si toutes les fonctions de k-jet donné sont équivalentes (à droite), on dit que le jet est *suffisant*. Ainsi donc, *le* $(\mu + 1)$-*jet de la fonction en un point critique de multiplicité* μ *est suffisant.*

Si le point critique est de multiplicité μ infinie, aucun k-jet fini n'est suffisant.

Exemple (Whitney). Considérons une fonction holomorphe de trois variables $f(x, y, z) = xy(x + y)(x - zy)(x - e^z y)$.

Le point critique 0 n'est pas isolé (l'axe des z est entièrement constitué de points critiques). *Le germe de f en 0 n'est équivalent (à droite) à aucun germe de polynôme.*

En effet, l'ensemble de niveau critique (nul) de f est formé de cinq surfaces différentiables qui se coupent le long de l'axe des z. Ces cinq surfaces définissent sur le plan $z =$ Cte cinq courbes qui se coupent en un même point. Les birapports construits pour quatre tangentes à ces courbes au point d'intersection dépendent de z. Si la fonction était équivalente à un polynôme, chacun de ces birapports serait une fonction algébrique de chacun des autres. Ce n'est pas le cas pour f, à cause du facteur e^z, ce qui fait que le germe de f n'est pas équivalent à un germe de polynôme.

6.4. Démonstration du théorème sur la détermination finie. Supposons que l'application $f: (\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}, 0)$ admette en 0 un point critique de multiplicité finie μ. Nous disons que, pour tout φ de $\mathfrak{m}^{\mu+2}$, la fonction $f + \varphi$ est R-équivalente à f. Par un raisonnement analogue à la démonstration du lemme de Morse (n° 6.2), nous obtenons une équation par rapport au champ v_t:

$$v_t(g_t(x)) \cdot (f + t\varphi) \equiv -\varphi(g_t(x)), \quad \varphi \in \mathfrak{m}^{\mu+2}.$$

Puisque cette égalité a lieu identiquement en x et t, il suffit de résoudre pour $\alpha = -\varphi$ l'équation par rapport à v_t:

$$v_t \cdot (f + t\varphi) = \alpha, \quad \alpha \in \mathfrak{m}^{\mu+2}.$$

Lemme 1. *Tout monôme de degré suffisamment élevé (exactement de degré* μ) *est contenu dans l'idéal gradient* $I_{\nabla f}$ *de la fonction* f *(i.e. dans l'idéal engendré par* $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_m)$):

$$\mathfrak{m}^\mu \subset I_{\nabla f}.$$

Exemple. Pour un point critique non dégénéré on a $\mu = 1$ et $I_{\nabla f} = \mathfrak{m}$.

Démonstration. Voir n° 5.5.

Lemme 2. *Tout monôme de degré suffisamment élevé (exactement de degré* μ*) appartient à l'idéal gradient de la fonction* $f + \varphi$, *i.e.* $\mathfrak{m}^{\mu} \subset I_{\nabla(f+\varphi)}$.

Exemple. Pour un point critique non dégénéré on a $\mu = 1$ et $I_{\nabla(f+\varphi)} = I_{\nabla f} = \mathfrak{m}$.

Démonstration du lemme 2. Considérons tous les monômes de degré μ. Leur nombre est fini. Soit M_s un de ces monômes. D'après le lemme 1, $M_s \in I_{\nabla f}$, i.e. il existe un développement

$$M_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_{i,s}(x).$$

Remplaçant dans cette formule f par $f + \varphi$, nous obtenons le développement

$$M_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f+\varphi)}{\partial x_i} h_{i,s}(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} h_{i,s}(x).$$

Le minuende appartient à $\mathfrak{m}^{\mu+1}$ (puisque $\varphi \in \mathfrak{m}^{\mu+2}$). On peut donc le représenter comme une combinaison linéaire de monômes M_p de degré μ à coefficients dans $\mathfrak{m}$. On obtient ainsi le développement

$$M_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f+\varphi)}{\partial x_i} h_{i,s}(x) - \sum_{p} M_p \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{p,j}(x) \right).$$

Considérons ces relations comme un système d'équations linéaires par rapport à un vecteur M de la famille de vecteurs inconnus $(M_1, \ldots, M_N)$. La matrice du système est de la forme $E + A$, où les éléments de A sont dans $\mathfrak{m}$. Le second membre est un vecteur $B = (B_1, \ldots, B_N)$ dont les éléments

$$B_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f+\varphi)}{\partial x_i} h_{i,s}$$

appartiennent à l'idéal gradient $I_{\nabla(f+\varphi)}$. Pour $x = 0$ le déterminant de la matrice $E + A$ est égal à 1, aussi le système est-il résoluble au voisinage de 0:

$$M = (E + A)^{-1} B.$$

Puisque $B_s \in I_{\nabla(f+\varphi)}$, on a $M_s \in I_{\nabla(f+\varphi)}$ comme demandé.

Remarque 1. Le raisonnement cité avec inversion de la matrice dans l'algèbre est formalisé dans un lemme dit de Nakayama.

Remarque 2. D'après le lemme 2, l'équation homologique

$$v_t \cdot (f + t\varphi) = \alpha \qquad (*)$$

est toujours résoluble pour t fixé quelconque, même avec $\alpha \in \mathfrak{m}^\mu$ au lieu de $\mathfrak{m}^{\mu+2}$. Cependant cela est insuffisant, car nous avons besoin d'une solution v_t qui dépende différentiablement de t et dont l'intégration nous donnerait g_t pour tout $t \in [0, 1]$.

Exemple. Considérons l'action du groupe des transformations homographiques réelles $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$ sur le plan de la variable complexe z. L'axe réel et le demi-plan supérieur sont deux orbites différentes de l'action. Considérons dans le demi-plan supérieur une courbe tangente à l'axe réel, par exemple $z = t + it^2$ (fig. 41). Le vecteur vitesse en tout point appartient au plan tangent à l'orbite correspondante, ce qui n'empêche pas la courbe de passer d'une orbite à l'autre.

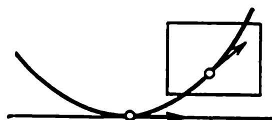


Fig. 41

La méthode d'homotopie ne convient pas, car, bien que l'équation homologique soit résoluble pour t fixé quelconque, on ne dispose pas de solution différentiablement dépendante de t.

On montre que dans le cas d'un groupe de Lie de dimension finie opérant sur une variété de dimension finie, il suffit que les dimensions des orbites restent inchangées le long de la courbe considérée pour que l'équation homologique admette une solution différentiablement dépendante de t (on suppose naturellement que l'équation soit résoluble pour t fixé quelconque). Dans cette hypothèse la courbe dont chaque vecteur tangent appartient à l'espace tangent à l'orbite est située tout entière dans une orbite unique.

Lemme 3. *Pour tout monôme de degré suffisamment élevé (exactement de degré $\mu + 1$) l'équation homologique admet une solution v_t qui dépend différentiablement de t et qui s'annule à l'origine.*

D é m o n s t r a t i o n. Mettons le monôme α sous la forme $x_i M_s$, où M_s est un monôme de degré μ. Le lemme 2 appliqué à $f + t\varphi$ permet de construire une solution différentiablement dépendante de t de l'équation homologique $(*)$ où le second membre est M_s. Multipliant cette solution par x_i, on obtient la solution cherchée v_t.

F i n d e l a d é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e. Mettons $\alpha = -\varphi \in \mathfrak{m}^{\mu+2}$ sous forme d'une combinaison linéaire fonctionnelle de monômes α_s de degré $\mu + 1$:

$$\alpha(x) = \sum c_s(x)\, \alpha_s(x).$$

Les équations homologiques (*) à second membre α_s seront résolues d'après le lemme 3:

$$\alpha_s(x) = v_{t,s}\cdot(f + t\varphi), \quad v_{t,s}(0) \equiv 0.$$

Le champ de vecteurs $v_t = \sum c_s(x)\, v_{t,s}$ définit la famille cherchée à un paramètre de difféomorphismes g_t:

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} \equiv v_t(g_t(x)), \quad g_t(0) \equiv 0, \quad (f + t\varphi)(g_t(x)) \equiv f(x).$$

Le théorème est démontré.

Remarque. La démonstration citée appartient à Mather. On trouve dans la littérature quatre démonstrations différentes du théorème de la détermination finie (pour les cas différentiable et holomorphe): [9], [45], [277], [251].

6.5. V-équivalence. En plus de la R-équivalence et de la RL-équivalence, il est bon d'introduire un troisième type d'équivalence, qui se traduit géométriquement par un difféomorphisme entre variétés de niveau d'applications: la V-équivalence.

Définition. On dit que deux germes f et $\tilde{f}$: $(\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ sont *V-équivalents* (V comme «variété»; on sous-entend la variété $f^{-1}(0)$) s'il existe un germe g: $(\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^m, 0)$ de changement à droite laissant 0 invariant et un germe M: $(\mathbf{R}^m, 0) \to \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ d'application de l'espace source dans la variété des automorphismes de l'espace but (i.e. dans la variété des matrices non dégénérées d'ordre n) tels que

$$\tilde{f}(x) \equiv M(x)\, f(g(x)).$$

Il est clair que le difféomorphisme local g envoie le germe en 0 de l'ensemble $\tilde{f}^{-1}(0)$ sur le germe en 0 de l'ensemble $f^{-1}(0)$. Les applications $f(x) = x^2$ et $f(x) = x^3$ ont les ensembles $f^{-1}(0)$ géométriquement identiques mais ne sont pas V-équivalentes.

Théorème. *Pour que deux germes soient V-équivalents, il faut et il suffit que les idéaux correspondant à ces germes passent l'un à l'autre par un difféomorphisme local convenable g de l'espace source.*

Soit en effet I_f l'idéal engendré par les composantes de f (i.e. l'idéal $f^*\mathfrak{m}_y A_x$ dans l'algèbre A_x des « fonctions de x »).

Lemme. *Si* $I_f = I_{\tilde{f}}$, *il existe en* 0 *un germe de matrice non dégénérée* M *tel que*

$$\tilde{f}(x) = M(x)\, f(x).$$

D é m o n s t r a t i o n. Puisque les composantes de f sont dans $I_{\tilde{f}}$ et celles de $\tilde{f}$ dans I_f, il existe des germes matriciels P, Q (en général non inversibles) tels que

$$\tilde{f}(x) = P(x) f(x), \quad f(x) = Q(x) \tilde{f}(x).$$

Donc $(QP - E) f \equiv 0$. Par conséquent, le germe matriciel $M = P + R[QP - E]$ fait passer f à $\tilde{f}$ pour tout R. Il reste à choisir un R tel que la matrice $M(0)$ soit non dégénérée. Dans le texte qui suit nous désignons par P, Q, R, M les valeurs des germes correspondants en 0 en les assimilant à des applications linéaires $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

Mettons $\mathbf{R}^n$ sous forme de somme directe de Ker P et de l'espace complémentaire A, et aussi sous forme de somme directe de Im P et de l'espace complémentaire B. De toute évidence $\dim A = \dim \operatorname{Im} P$ et $\dim B = \dim \operatorname{Ker} P$. On peut donc prendre R tel que $RA = 0$, $R(\operatorname{Ker} P) = B$. Alors $M(\operatorname{Ker} P) = B$, $M(A) = \operatorname{Im} P \bmod B$; la matrice M est non dégénérée. Le lemme est démontré, et le théorème est immédiat.

Définition. Deux germes d'applications $f: (\mathbf{R}^m, a) \to (\mathbf{R}^n, b)$ et $\tilde{f}: (\mathbf{R}^n, \tilde{a}) \to (\mathbf{R}^m, \tilde{b})$ sont dits *V-équivalents* s'ils deviennent V-équivalents quand on transporte l'origine des coordonnées de a, b et de $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ en 0.

Remarque. Bien qu'on fasse intervenir ici la structure d'espace vectoriel de $\mathbf{R}^m$ et $\mathbf{R}^n$, la propriété de V-équivalence est indépendante de cette structure: au lieu de transporter l'origine, on pourrait utiliser un difféomorphisme. Il y a plus, on montre que la V-classe de f en a se définit par une paire de germes de sous-variétés de dimension m du produit direct $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ au point (a, b):

[« axe » des $x = (\mathbf{R}^m, a) \times b$; graphe de f]

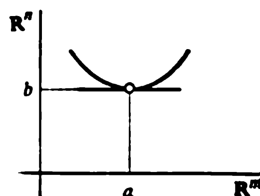


Fig. 42

(fig. 42) (cette paire de germes est définie à des difféomorphismes près de l'espace produit). Cette classe dépend de la tangence des sous-variétés indiquées, c'est pourquoi Mather a appelé ce type d'équivalence *contact equivalence*. J. Martinet [203] a introduit le terme de V-équivalence afin d'éviter toute confusion avec le groupe de contact (cf. chap. III).

6.6. V-stabilité infinitésimale. A la V-équivalence correspond une notion particulière de stabilité infinitésimale.

Soit $f: (\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ un germe d'application différentiable (un ∞-jet d'application formelle, . . .) $y = f(x)$ en 0.

Considérons l'espace de toutes les variations de f.

Soit $\{F(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon a(x) + \ldots\}$ une déformation à un paramètre de f.

La *variation* (ou *vitesse initiale*) de la déformation F se définit par la fonction vectorielle a.

Désignons les composantes de f, de F et de a (en coordonnées fixées) par f_i, F_i et a_i. Les « fonctions » f_i et a_i appartiennent à l'algèbre considérée A_x (des germes en 0 de fonctions différentiables, formelles, analytiques ou holomorphes de $(x_1, \ldots, x_m)$). La variation de f se définit donc par une famille de n éléments de A_x. Une telle famille sera appelée *colonne à éléments* $(a_1, \ldots, a_n)$ et notée aussi par

$$a_1e_1 + \ldots + a_ne_n = a_1\partial/\partial y_1 + \ldots + a_n\partial/\partial y_n$$

(car a_i est la vitesse de variation de la coordonnée y_i). Toutes les colonnes de variations forment un module libre $(A_x)^n$ à n générateurs $e_i = \partial/\partial y_i$ sur l'algèbre A_x.

Dans cette terminologie, la définition de la RL-équivalence infinitésimale du germe f s'énonce ainsi : pour toute colonne $a \in (A_x)^n$ on a un développement

$$a(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} h_j(x) + \sum k_r(f(x))\, e_r, \tag{1}$$

où $h_j \in A_x$, $\partial f/\partial x_j \in (A_x)^n$, $k_r \in A_y$ sont des « fonctions » de $y_1, \ldots, y_n$.

Notons qu'en variant les coefficients h dans cette formule, le premier terme de la somme parcourt un A_x-sous-module dans $(A_x)^n$. En variant k, le second terme ne parcourt qu'un sous-espace vectoriel (ou, si l'on veut, un module sur l'algèbre des fonctions de y mais non de x).

Définition. On dit qu'un germe d'application f est *$\dot{V}$-infinitésimalement stable* (ou *Vinf-stable*) si les images des vecteurs de base $e_1, \ldots, e_n$ engendrent sur $\mathbf{R}$ le module quotient

$$T = (A_x)^n \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_j},\ f_ie_r\right) \quad (j = 1, \ldots, m;\quad i, r = 1, \ldots, n).$$

Remarque. L'origine de cette définition est la suivante. Les variations de f par les difféomorphismes de la source sont de la forme $\sum\limits_j \frac{\partial f}{\partial x_j} h_j(x)$. Elles forment dans $(A_x)^n$ un sous-module engendré par m colonnes $\partial f/\partial x_j$. Il existe un autre type de variation de f qui conserve la classe de V-équivalence : il consiste à multiplier à gauche

un vecteur du système d'équations $\{f_s = 0\}$ par une matrice fonction C (matrice d'ordre n à éléments de A_x) non dégénérée pour $x = 0$. Si la matrice $C(\varepsilon) = E + \varepsilon c + \ldots$ est proche de la matrice unité, le système se transforme en un système de la forme $\{\tilde{f}_s = 0\}$, où $\tilde{f} = f + \varepsilon cf + \ldots$ Par conséquent, la variation de f est de la forme cf, i.e. elle appartient au sous-module engendré dans $(A_x)^n$ par n^2 colonnes $f_i e_r$ (les f_i occupent la r-ième position dans leurs colonnes respectives; on a 0 dans les autres positions).

Ainsi donc, le dénominateur de la formule de T se compose de variations « triviales »: un générateur $\partial f/\partial x_j$ revient à faire une translation suivant l'axe des x_j, et un générateur $f_i e_r$, à ajouter l'i-ième équation à la r-ième.

La condition de Vinf-stabilité signifie donc que *toute variation du système d'équations* $\{f_s = 0\}$ *se laisse déduire de la variation triviale en faisant une translation infinitésimale dans l'espace but* (une telle translation remplace le système $\{f_s = 0\}$ par $\{f_s = \varepsilon_s\}$).

Théorème. *Tout germe Vinf-stable est inf-stable, et vice versa.*

Démonstration. Supposons que le germe f soit inf-stable, i.e. qu'il existe des développements (1). Il est évident que f est aussi Vinf-stable. En effet, isolons les termes constants dans k_r et mettons ces fonctions sous la forme

$$k_r(y) = c_r + \sum_{i=1}^{n} y_i g_{i,r}(y), \quad c_r \in \mathbf{R}, \quad g_{i,r} \in A_y.$$

Portant les développements des k_r dans (1), nous obtenons un développement pour chaque vecteur de la variation a:

$$a = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} h_j + \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f_i g_{i,r}(f) e_r + \sum_{r=1}^{n} c_r e_r.$$

Ce développement démontre la Vinf-stabilité.

La réciproque se démontre en parfaite analogie avec le théorème de préparation (voir n° 4.4).

Supposons que $(e_1, \ldots, e_n)$ engendrent T sur le corps des nombres. Pour toute variation a de $(A_x)^n$, il existe alors un développement

$$a = \sum_{r=1}^{n} c_r e_r + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} h_j + \sum_{i,r=1}^{n} g_{r,i} f_i e_r. \qquad (2)$$

En particulier, le coefficient de f_i (i.e. la colonne $\sum_{r=1}^{n} g_{r,i} e_r \in (A_x)^n$) admet un développement de la forme (2). Portons tous ces déve-

loppements dans (2). Nous obtiendrons un meilleur développement (2), à savoir :

$$a = \sum_{r=1}^{n} \left(c_r + \sum_{i=1}^{n} c_{r,\,i} f_i\right) e_r + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} \tilde{h}_j + \sum_{i,\,r,\,p=1}^{n} g_{r,\,i,\,p} f_i f_p e_r.$$

En développant le coefficient $\sum_{r=1}^{n} g_{r,\,i,\,p} e_r$ d'après la formule (2), nous améliorons encore le développement et nous augmentons le degré du produit des composantes de f dans le dernier terme. Au bout d'un nombre infini de pas nous aurons abouti au développement

$$a = \sum_{r=1}^{n} c_r(f)\, e_r + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} \hat{h}_j \tag{3}$$

qui démontre la stabilité infinitésimale au niveau des séries formelles.

Le passage aux variantes moins formelles (différentiable, analytique et holomorphe) s'opère comme dans le théorème de préparation ordinaire.

Remarque 1. L'énoncé général du « théorème de préparation pour les modules » est le suivant : *supposons que* $f(0) = 0$ *et que les éléments* $e_1, \ldots, e_n$ *d'un* A_x*-module* F *de type fini engendrent un espace vectoriel* $F/f^*\mathfrak{m}_y F$; *ces mêmes éléments engendrent alors* F *comme un module sur* A_y.

Dans notre cas $F = (A_x)^n/(\partial f/\partial x_j)$.

Remarque 2. Si le germe d'application f dépend différentiablement d'un paramètre $t \in [0, 1]$ et est Vinf-stable pour tout t fixé, on peut choisir un développement (3) tel que les coefficients c_r et $\hat{h}_j$ dépendent différentiablement de t (a peut même dépendre différentiablement de t).

La démonstration est la même que pour le cas paramétrique du théorème de préparation (exemple 4 du n° 4.5).

Exemple. Soit f une fronce de Whitney définie par

$$f_1 = x_1^3 + x_1 x_2, \quad f_2 = x_2.$$

Voyons si les conditions de Vinf-stabilité sont vérifiées (ce qui est plus facile que de vérifier l'inf-stabilité directement). Le module $(A_x)^n = (A_x)^2$ est engendré par les colonnes de la forme $\begin{Bmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \end{Bmatrix}$.

Les dérivées $\partial f/\partial x_j$ sont des colonnes

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)=\begin{pmatrix}3x_1^2+x_2\\0\end{pmatrix},\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=\begin{pmatrix}x_1\\1\end{pmatrix}.$$

Les colonnes $y_l e_r$ s'écrivent

$$\begin{pmatrix}x_1^3+x_1x_2\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\x_1^3+x_1x_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_2\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix}.$$

Le dénominateur dans la formule de T est un sous-module dans $(A_x)^2$ engendré par les six colonnes écrites ci-dessus.

Il est facile de calculer le sous-module engendré par cinq colonnes des six (à l'exception de $\partial f/\partial x_2$): il contient

$$\begin{pmatrix}x_2\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1^2\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\x_1^3\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'espace quotient est engendré par cinq colonnes

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\x_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\x_1^2\end{pmatrix}. \tag{*}$$

Maintenant, puisque $\partial f/\partial x_2=(x_1,\ 1)$, on a

$$\begin{pmatrix}0\\x_1^2\end{pmatrix}=x_1^2\begin{pmatrix}x_1\\1\end{pmatrix}-x_1\begin{pmatrix}x_1^2\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}x_1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1^2\\0\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, toutes les cinq colonnes (*) sont congrues modulo le dénominateur de la formule de T aux combinaisons numériques linéaires des colonnes de base $e_1=(1,\ 0)$ et $e_2=(0,\ 1)$. Par conséquent, la fronce de Whitney est Vinf-stable, donc aussi inf-stable.

§ 7. Démonstration du théorème de stabilité

Dans ce paragraphe nous montrons que tout germe d'application inf-stable est stable. La démonstration se fait en deux étapes. Dans un premier temps, nous montrons qu'un k-jet d'un germe inf-stable pour k suffisamment grand est stable, i.e. que toute application suffisamment proche admet dans un certain point suffisamment proche un k-jet RL-équivalent à celui du germe initial. Dans un deuxième temps, nous montrons qu'un k-jet d'un germe inf-stable pour un k suffisamment grand est suffisant. La stabilité découle avec évidence de ces deux résultats.

7.1. Démonstration de la suffisance d'un k-jet d'un germe d'application inf-stable. Nous allons démontrer la proposition suivante:

Théorème. *Si le germe f d'une application dans un espace de dimension n est inf-stable, f est $(n+1)$-déterminé, i.e. son $n+1$-jet est suffisant. Autrement dit, on peut tronquer la série taylorienne de f en 0 à l'ordre $n+2$ sans que le type différentiable du germe change.*

Exemple. La fronce de Whitney est 3-déterminée, car la dimension de l'espace but $n = 2$.

Introduisons quelques notations:

$\theta = (A_x)^n$, A_x-module des variations du germe f [$(A_x)^n$ est un module libre à n générateurs $e_i = \partial/\partial y_i$ sur l'algèbre A_x des « fonctions » de $x_1, \ldots, x_m$; ses éléments sont des « colonnes » $(a_1, \ldots \ldots, a_n) = \sum a_i e_i$ $(a_i \in A_x)$].

$M = (\partial f/\partial x_j,\ f_i e_j)$, A_x-sous-module des variations V-triviales (dénominateur dans la formule de T de la définition de la stabilité V-infinitésimale).

$\mathfrak{m}_x$, idéal maximal dans A_x (il se compose de toutes les « fonctions » qui s'annulent pour $x = 0$).

Lemme 1. *Si f est un germe infinitésimalement stable en 0 d'une application dans un espace de dimension n, toutes les variations de f d'ordre suffisamment élevé (exactement d'ordre n en 0) sont triviales:* $\mathfrak{m}_x^n\theta \subset M$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit un monôme vecteur $x^i e_s = x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} e_s$. Ecrivons la suite $e_s, x_{i_1}e_s, x_{i_1}x_{i_2}e_s, \ldots, x_{i_1} \ldots \ldots x_{i_n}e_s$. Nous avons $n+1$ éléments dans θ. Puisque f est inf-stable et, par suite, Vinf-stable, on a $\dim_{\mathbf{R}} \theta/M \leqslant n$. Il existe donc une combinaison linéaire à coefficients numériques non tous nuls telle que

$$c_0 e_s + c_1 x_{i_1} e_s + \ldots + c_n x_{i_1} \ldots x_{i_n} e_s \in M.$$

Soit c_r le premier coefficient non nul. Mettant en facteur $x_{i_1} \ldots \ldots x_{i_r} e_s$, nous obtenons $x_{i_1} \ldots x_{i_r} e_s \in M$, donc $x^i e_s \in M$, ce qu'il fallait démontrer.

Définition. On dit que le germe en 0 d'une application dans un espace de dimension n est *presque V-infinitésimalement stable* (en abrégé PVIS) si la condition de stabilité V-infinitésimale (VIS) est vérifiée à des termes d'ordre de petitesse $(n+1)$ près.

Ainsi donc, la condition PVIS exprime l'existence, pour toute variation α de f en 0, du développement

$$\text{(PVIS)} \quad \alpha(x) = -\frac{\partial f}{\partial x} h(x) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x) f_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i e_i + r(x),$$
$$r \in \mathfrak{m}_x^{n+1}\theta.$$

Lemme 2. *Si f est un PVIS-germe en 0 d'une application dans un espace de dimension n, toutes ses variations d'ordre n en 0 sont triviales:* $\mathfrak{m}_k^n\theta \subset M$.

D é m o n s t r a t i o n. Numérotons tous les monômes vecteurs de degré n: $\rho_1, \ldots, \rho_N$. Pour tout monôme vecteur de degré n, il existe un développement (PVIS) dans lequel $c_i = 0$:

$$\rho_p = m_p + r_p, \quad m_p \in M, \quad r_p \in \mathfrak{m}_x^{n+1}\theta \qquad (*)$$

(ce développement se construit comme dans le lemme 1, quitte à changer M en $M + \mathfrak{m}_x^{n+1}\theta$).

Puisque le terme résiduel r_p est d'ordre $n+1$, on peut le mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de monômes vecteurs de degré n à coefficients de premier ordre de petitesse:

$$r_p = \sum_q \beta_{p,q}\rho_q, \quad \beta_{p,q} \subset \mathfrak{m}_x.$$

Récrivons maintenant la totalité des développements (*) comme une équation matricielle par rapport à une colonne (ρ) de $\rho_1, \ldots$ $\ldots, \rho_N$:

$$(E - \beta)(\rho) = (m),$$

où (m) est une colonne de m_p et β une matrice d'ordre $N \times N$ à éléments de $\mathfrak{m}_x$. L'inversion de la matrice $E - \beta$ nous donne $\rho_p \in M$, car tous les m_p appartiennent à M. Le lemme est démontré.

Lemme 3. (PVIS) $\Rightarrow$ (VIS).

D é m o n s t r a t i o n. Considérons le développement (PVIS). D'après le lemme 2 son terme résiduel appartient à M. On peut donc, quitte à choisir convenablement les coefficients h et g_i, annuler le terme r dans (PVIS), ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 4. *La stabilité infinitésimale d'un germe d'application dans un espace de dimension n est $(n+1)$-déterminée. Autrement dit, si le germe de f en 0 est inf-stable et que $\varphi \in \mathfrak{m}_x^{n+2}\theta$, le germe de $f+\varphi$ en 0 est inf-stable.*

D é m o n s t r a t i o n. (IS) $\Rightarrow$ (VIS), aussi pour toute variation α a-t-on un développement

$$\text{(VIS)} \qquad \alpha(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}h(x) + \sum g_i(x) f_i(x) + \sum c_i e_i.$$

Changeons f en $\tilde{f} = f + \varphi$ en conservant les coefficients h, g_i et c_i. Il vient

$$\alpha(x) = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}h(x) + \sum g_i(x)\tilde{f}(x) + \sum c_i e_i - r(x),$$

où $r = \sum g_i \varphi_i - \frac{\partial \varphi}{\partial x} h$. Remarquons que r est petit d'ordre $(n+1)$ ($r \in \mathfrak{m}_x^{n+1}\theta$). Nous avons donc obtenu pour le germe $\tilde{f}$ le développement $(\mathrm{PVIS})_{\tilde{f}}$. D'après le lemme 3 nous construirons pour le germe $\tilde{f}$ le développement $(\mathrm{VIS})_{\tilde{f}}$, et à partir de celui-ci, le développement cherché $(\mathrm{IS})_{\tilde{f}}$ (voir nº 6.6).

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e. Soient f un germe inf-stable et $\varphi \in \mathfrak{m}_x^{n+2}\theta$. Appliquons la méthode d'homotopie: considérons $f_t = f + t\varphi$, $t \in [0, 1]$. Cherchons des difféomorphismes H_t (dans la source) et K_t (dans le but) dépendant du temps t, tels que $f_t \circ H_t \equiv K_t \circ f$ *). A ces difféomorphismes correspondent des champs de vecteurs k_t et h_t qui dépendent du temps:

$$k_t\,(K_t\,(y)) = \partial K_t\,(y)/\partial t, \quad h_t\,(H_t\,(x)) = \partial H_t\,(x)/\partial t.$$

Dérivant le diagramme commutatif, nous obtenons l'équation homologique

$$\left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{H_t(x)} + f_{t*} h_t \big|_{H_t(x)} = k_t \big|_{K_t(f(x))}$$

(ici $*$ signifie la dérivée de f_t pour t fixé). Compte tenu de la relation $K_t \circ f = f_t \circ H_t$, nous obtenons une relation dont les deux membres se laissent calculer en $H_t\,(x)$.

Puisque cette relation doit rester vraie pour x, t quelconques, c'est une identité ; au lieu de l'argument $H_t\,(x)$, on peut donc mettre une lettre quelconque, par exemple x. Ainsi, l'équation homologique devient

$$\alpha\,(x) = -\frac{\partial f_t}{\partial x} h_t\,(x) + k_t\,(f_t\,(x)). \qquad (**)$$

Il s'agit de chercher sa solution (h, k) pour $\alpha = \varphi$. L'équation (**) a des solutions pour t quelconque, d'après le lemme 1. Nous chercherons des champs de vecteurs h_t et k_t qui dépendent différentiablement de $t \in [0, 1]$ et qui s'annulent à l'origine ($x = 0$ pour h_t, $y = 0$ pour k_t).

Commençons par la différentiabilité suivant t. Dans la démonstration du lemme 4, à l'aide des lemmes 2 et 3, nous avons construit un développement (IS) valable pour tout t. Montrons que toute cette construction dépend différentiablement de t. Deux pièges abscons sont à signaler ici:

---

*) Notons une nuance dans l'utilisation de la méthode d'homotopie: on écrira la commutativité de telle sorte que les arguments dans le premier et le second membre deviennent identiques après la dérivation.

1) en passant de $(\mathrm{PVIS})_{f_t}$ à $(\mathrm{VIS})_{f_t}$, nous avions choisi le premier coefficient non nul c_r (dans la démonstration du lemme 1);

2) en passant de $(\mathrm{VIS})_{f_t}$ à $(\mathrm{IS})_{f_t}$, nous avons fait un renvoi au n° 6.6

Or:

1) le coefficient non nul dépend de f et non de f_t;

2) il a été montré au n° 6.6 que la condition $(\mathrm{VIS})_{f_t}$ garantit la possibilité de choisir une solution de (**) différentiable suivant t pour tout t de $[0, 1]$ moyennant une partition de l'unité.

Nous avons ainsi construit une solution différentiable de l'équation (**). Il reste à obtenir l'annulation de h_t, k_t à l'origine. Rappelons que f est un (IS)-germe d'application dans $\mathbf{R}^n$ et que $f_t = f + t\varphi$, où $\varphi \in \mathfrak{m}_x^{n+2}\theta$.

Proposition 1. *Si α est un petit d'ordre n en 0 ($\alpha \in \mathfrak{m}_x^n\theta$), il existe un développement dépendant différentiablement de t:*

$$\alpha(x) = \frac{\partial f_t}{\partial x} h_t(x) + k_t(f_t(x)) \text{ avec } k_t(0) \equiv 0.$$

D é m o n s t r a t i o n. D'après le lemme 1, on a pour α un développement $(\mathrm{VIS})_f$ dans lequel $c_i = 0$. Dans la transformation de ce développement opérée pour la démonstration du lemme 4, les coefficients c_i sont invariants tant pour $(\mathrm{VIS})_f \to (\mathrm{PVIS})_{f_t}$ que pour $(\mathrm{PVIS})_{f_t} \to (\mathrm{VIS})_{f_t}$. En passant de $(\mathrm{VIS})_{f_t}$ à $(\mathrm{IS})_{f_t}$ nous obtenons $k_t(0) = \sum c_i e_i$ (voir n° 6.6). Donc $k_t(0) = 0$ comme demandé.

Proposition 2. *Pour que l'équation de stabilité infinitésimale*

$$\alpha(x) = -\frac{df_t}{\partial x} h_t(x) + k_t(f_t(x)) \qquad (**)$$

admette pour α quelconque de θ une solution qui dépend différentiablement de t, il faut et il suffit que soit résoluble, pour toute fonction $a \in A_x$, l'équation

$$aE = -f_{t*}H + K \qquad (***)$$

par rapport aux matrices H et K.

Ici H est une matrice d'ordre $m \times n$ dont les éléments sont des fonctions de x et t, et K une matrice $n \times n$ dont les éléments sont des fonctions de $y = f_t(x)$ et t (différentiables de classe donnée); E est la matrice unité d'ordre n.

D é m o n s t r a t i o n. Les s-ièmes colonnes de H et K fournissent une solution de l'équation de stabilité infinitésimale (**) de premier membre $\alpha(x) = a(x) e_s$.

Proposition 3. *Soient*

$$uE = -f_{t*}H_u + K_u, \quad vE = -f_{t*}H_v + K_v.$$

Alors

$$uvE = -f_{t*}H_{uv} + K_{uv},$$

où

$$H_{uv} = vH_u + H_vK_u, \quad K_{uv} = K_vK_u.$$

Cette proposition se démontre par substitution directe.

Remarque. On déduit aisément de la proposition 3 que la condition suffisante de la stabilité infinitésimale est que soient résolubles m équations matricielles (***) avec $a = x_1, \ldots, x_m$.

Proposition 4. *Si* $a \in \mathfrak{m}_x^n$, *l'équation* (***) *admet une solution* (H_a, K_a), *où* $K_a(t, 0) \equiv 0$.

Démonstration. Voir les propositions 1 et 2.

Proposition 5. *Si* $a \in \mathfrak{m}_x^{n+1}$, *l'équation* (***) *admet une solution* (H_a, K_a), *où* $H_a(t, 0) \equiv 0$ *et* $K_a(t, 0) \equiv 0$.

Démonstration. Mettons a sous la forme uv, $u \in \mathfrak{m}_x^n$, $v \in \mathfrak{m}_x$. D'après la proposition 3, on peut prendre $H_{uv} = vH_u + H_vK_u$, $K_{uv} = K_vK_u$. D'après la proposition 4, on peut poser $K_u(t, 0) \equiv 0$, d'où la solution cherchée.

Finissons la démonstration du théorème.

De la proposition 5 et de la démonstration de la proposition 2 il ressort que l'équation homologique (**) est résoluble pour $\alpha \in \mathfrak{m}_x^{n+1}\theta$ dans la classe des champs h_t, k_t dépendant différentiablement de t, qui s'annulent à l'origine. Or, on a $\varphi \in \mathfrak{m}_x^{n+2}\theta$ par définition. Nous avons donc construit une solution h_t, k_t différentiable suivant t de l'équation homologique de premier membre $\alpha = \varphi$, solution qui s'annule à l'origine. Les champs h_t et k_t définissent les difféomorphismes locaux cherchés H_t et K_t au voisinage de $x = 0$ et $y = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. La démonstration du théorème est finie.

7.2. Stabilité infinitésimale et transversalité à l'orbite. Soit $f: (\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ un germe d'application différentiable.

Définition. On appelle *petit espace des k-jets d'applications de* $\mathbf{R}^m$ *dans* $\mathbf{R}^n$ l'espace des k-jets en 0 des applications de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$ qui envoient 0 sur 0. *Notation*: $J^k_{0,0}(m, n)$.

Définition. On appelle *espace moyen des k-jets d'applications de* $\mathbf{R}^m$ *dans* $\mathbf{R}^n$ l'espace des k-jets en 0 des applications de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$. *Notation*: $J^k_0(m, n)$.

Définition. On appelle *grand espace des k-jets d'applications de* $\mathbf{R}^m$ *dans* $\mathbf{R}^n$ l'espace des k-jets dans tous les points des applications de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$. *Notation*: $J^k(m, n)$.

Les groupes des k-jets des changements de variables à gauche et à droite qui laissent invariant 0 dans $\mathbf{R}^n$ et dans $\mathbf{R}^m$ respectivement opèrent sur le petit espace des jets.

Définition. On appelle *petite orbite du k-jet de f en* 0 l'orbite du jet sous l'action du groupe indiqué (des k-jets des changements à gauche et à droite qui laissent 0×0 invariant) dans le petit espace des jets.

Des transports parallèles dans $\mathbf{R}^m$ et dans $\mathbf{R}^n$ induisent des projections (non canoniques mais utiles) de fibrations des espaces des jets plus grands au-dessus des plus petits.

Exemple. Soient $m = n = 1$. Alors le 1-jet se définit par trois nombres x, y, $p = dy/dx$. Les espaces des 1-jets sont les espaces

$$\{(x, y, p)\}, \quad \{(y, p)\} \quad \text{et} \quad \{p\}$$

respectivement. Les projections sont

$$(x, y, p) \mapsto (y, p), \quad (y, p) \mapsto (p), \quad (x, y, p) \mapsto (p).$$

La petite orbite du 1-jet de la fonction $f(x) = x^2$ en 0 se réduit à un point $p = 0$ du petit espace des jets $\{p\}$.

Définition. On appelle *orbite moyenne* (resp. *grande*) *du k-jet de f* les images réciproques de la petite orbite par la projection de l'espace des jets moyen (resp. grand) sur le petit.

Exemple. L'orbite moyenne du 1-jet de la fonction $f(x) = x^2$ en 0 est la droite $p = 0$ sur le plan $\{(y, p)\}$; la grande orbite est le plan $p = 0$ dans l'espace tridimensionnel $\{(x, y, p)\}$.

Remarque. La grande orbite est l'orbite du k-jet sous l'action du groupe de dimension infinie des difféomorphismes des espaces source et but dans le grand espace des jets ; l'orbite moyenne est l'orbite du k-jet sous l'action du sous-groupe qui laisse invariant 0 de la source dans l'espace moyen des jets.

Considérons une extension à k-jets d'un germe d'application f. C'est le germe d'une application de l'espace source $(\mathbf{R}^m, 0)$ dans le grand espace des jets :

$$j^k f\colon (\mathbf{R}^m, 0) \to J^k(m, n).$$

Nous l'appellerons *grande extension*.

Définition. On appelle *extension moyenne* et *petite extension à k-jets de f* les germes en 0 d'applications de l'espace source dans l'espace moyen et le petit espace des jets qu'on obtient à partir de la grande extension par des projections ultérieures sur ces espaces.

Exemple. Pour $f(x) = ax^2$ les extensions grande, moyenne et petite à 2-jets se définissent par les formules

$$\xi \mapsto (\xi, a\xi^2, 2a\xi, 2a), \quad \xi \mapsto (a\xi^2, 2a\xi, 2a) \text{ et } \xi \mapsto (2a\xi, 2a)$$

respectivement.

Théorème. *Un germe $f\colon (\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ d'une application dans un espace de dimension n est inf-stable si et seulement si pour un certain $k \geqslant n$ (arbitraire s'il existe) sa grande extension (resp. son extension moyenne, sa petite extension) à k-jets est transversale à la grande orbite (resp. à l'orbite moyenne, à la petite orbite) du k-jet de f en* 0.

Exemple. Le germe $f = ax^2$ en 0 est inf-stable si et seulement si sa grande (moyenne, petite) extension à 1-jets est transversale au plan (à la droite, au point) $p = 0$. C'est le cas pour $a \neq 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Pour qu'une application dans le fibré soit transversale à un sous-fibré de ce dernier, il faut et il suffit que la projection sur la base du fibré transforme l'application donnée en une application transversale à la base du sous-fibré. Appliquons ce résultat aux fibrés du grand espace des jets au-dessus de l'espace moyen et du moyen au-dessus du petit, et aux sous-fibrés induits par les orbites. Nous constatons qu'il suffit de démontrer la proposition du théorème pour l'orbite moyenne.

Calculons l'espace tangent à l'orbite moyenne en son point $j_0^k(f)$. A cet effet, introduisons des systèmes de coordonnées de façon à identifier l'espace tangent à l'espace moyen des jets avec l'espace des jets lui-même.

Proposition 1. *Un k-jet α appartient à l'espace tangent à l'orbite moyenne du k-jet de l'application f en 0 si et seulement si α admet un développement*

$$\alpha = -\frac{\partial f}{\partial x} h(x) + k(f(x)) \bmod \mathfrak{m}_x^{k+1}\theta,$$

où $h(0) = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Quels que soient h et k, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f(x - \varepsilon h(x)) + \varepsilon k(f(x - \varepsilon h(x))) = -\frac{\partial f}{\partial x} h(x) + k(f(x)).$$

Si $h(0) = 0$, on obtient le développement cherché en prenant le k-jet en 0 du premier et du second membre.

Remarque. Le second membre dépend précisément du k-jet de f en 0 et non du $k+1$-jet, car $h(0) = 0$.

Proposition 2. *L'image d'un vecteur tangent $\xi \in T_0\mathbf{R}^m$ par l'action de la dérivée de l'extension moyenne à k-jets de f en 0 est le k-jet*

$$(\partial f/\partial x)\,\xi \bmod \mathfrak{m}_x^{k+1}\theta.$$

Démonstration. Par définition, nous devons calculer la partie principale linéaire en ξ de $j_0^k(f \circ \tau_\xi) - j_0^k f$, où $\tau_\xi(x) = x + \xi$. Considérons le développement taylorien

$$f(x + \xi) - f(x) = (\partial f/\partial x)\,\xi + o(\xi).$$

Prenant le k-jet en x pour $x = 0$ du premier et du second membre, on obtient

$$j_0^k(f \circ \tau_\xi) - j_0^k(f) = [j_0^k(\partial f/\partial x)]\,\xi + o(\xi),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. L'image du vecteur ξ dépend du $k+1$-jet de f et ne se définit pas par le k-jet.

Fin de la démonstration du théorème. En accord avec les propositions 1 et 2, la condition de transversalité de l'extension à k-jets de f à l'orbite moyenne en 0 s'énonce ainsi: toute variation α du germe d'application en 0 admet un développement

$$\text{(Tr)} \qquad \alpha(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{h}(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \boldsymbol{k}(f(x)) \bmod \mathfrak{m}_x^{k+1}\theta,$$

où $\boldsymbol{h}(0) = 0$.

Quant à la condition d'inf-stabilité, elle implique l'existence du développement

$$\text{(IS)} \qquad \alpha(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{h}(x) + \boldsymbol{k}(f(x))$$

sans la restriction $\boldsymbol{h}(0) = 0$.

On déduit le développement (Tr) de (IS) en isolant dans $\boldsymbol{h}$ le terme constant; la stabilité infinitésimale entraîne donc la transversalité pour k quelconque. Réciproquement, supposons que (Tr) ait lieu pour un $k \geqslant n$. Alors (Tr) a lieu aussi pour $k = n$. Par conséquent, f est un PVIS-germe. D'après le lemme 3 du n° 7.1, f est un VIS-germe, donc aussi un IS-germe (n° 6.6).

Le théorème est démontré.

7.3. Démonstration de la stabilité. Soit $f : (\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ un germe inf-stable.

Théorème de la stabilité (Mather). *Le germe f est stable.*

Démonstration. Fixons un représentant $f: U \to \mathbf{R}^n$ de f et considérons une application suffisamment proche (ainsi que ses $n + 2$ dérivées) $\tilde{f}: U \to \mathbf{R}^n$. D'après le théorème du n° 7.2, l'extension à $n + 1$-jets de l'application f est transversale à la grande orbite du $n + 1$-jet de f en 0. Par conséquent, l'extension à $n + 1$-jets de l'application $\tilde{f}$ est transversale à cette grande orbite en un point proche du $n + 1$-jet de f en 0 (fig. 43).

Ainsi donc, le $n + 1$-jet de l'application $\tilde{f}$ en un certain point $\tilde{0}$

proche de 0 est situé dans la grande orbite du $n + 1$-jet de f en 0. Montrons que le germe d'application $\tilde{f}$ en $\tilde{0}$ est RL-équivalent au germe d'application f en 0. En effet, d'après la définition de la grande orbite, les $n + 1$-jets de f en 0 et de $\tilde{f}$ en $\tilde{0}$ sont RL-équivalents, i.e. on trouve des changements de coordonnées dans $\mathbf{R}^m$ et dans $\mathbf{R}^n$ par lesquels le germe $\tilde{f}$ en $\tilde{0}$ se transforme en un germe g en 0 dont le $n + 1$-jet est identique au $n + 1$-jet de f en 0. D'après le théorème du n° 7.1, le $n + 1$-jet de f en 0 est suffisant. Par conséquent, les germes f et g en 0 sont RL-équivalents. Il s'ensuit que les germes f en 0 et $\tilde{f}$ en $\tilde{0}$ sont RL-équivalents, ce qui démontre le théorème.

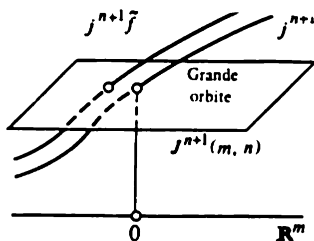


Fig. 43

Exemple. La fronce de Whitney est inf-stable (n° 6.6, p. 108), donc aussi stable.

Problème. Démontrer la stabilité du germe de l'application de Whitney généralisée Σ^{1_n}: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ (n° 2.5, p. 42) et des germes elliptique et hyperbolique d'applications Σ^2: $(\mathbf{R}^4, 0) \to$ $\to (\mathbf{R}^4, 0)$ (n° 3.6, p. 59).

§ 8. Déploiements versels

Dans l'étude de toutes les singularités possibles, le cas le plus intéressant est généralement celui des singularités génériques, car toute singularité plus compliquée peut être supprimée par une petite déformation. Par exemple, une fonction générique n'a que des points critiques non dégénérés ; un point critique dégénéré, tel que celui de la fonction x^3, se décompose en points non dégénérés par une déformation arbitrairement petite $x^3 - \varepsilon x$.

Or, dans bien des cas, on n'envisage pas un objet isolé mais toute une famille d'objets dépendant d'un ou de plusieurs paramètres. Il arrive qu'une singularité dégénérée, étant supprimable pour toute valeur fixée des paramètres, cesse de l'être pour la totalité de la famille: quand on fait « bouger » la famille, des singularités dégénérées y apparaissent pour des valeurs des paramètres légèrement différentes des valeurs initiales. Considérons par exemple une famille de fonctions $x^3 + tx$ dépendant du paramètre t. Pour $t = 0$ la fonction de la famille admet un point critique dégénéré ; toute famille proche admettra nécessairement un point critique dégénéré pour une valeur du paramètre proche de 0, bien qu'on puisse, pour toute valeur fixée du paramètre, faire disparaître le point dégénéré en faisant bouger la fonction.

Ainsi donc, les singularités non génériques cessent d'être supprimables dès que l'on passe de l'étude d'un objet isolé à celle d'une famille d'objets. Il est alors naturel de considérer la famille dans laquelle la singularité dégénérée devient non supprimable plutôt que la singularité elle-même, en observant la décomposition (bifurcation) de la singularité lors d'une variation des paramètres de la famille.

La famille considérée localement (au voisinage de valeurs fixées des paramètres) s'appelle *déploiement* de l'objet qui répond à ces valeurs des paramètres. Il se trouve que, dans bien des cas, on peut réduire l'étude de l'ensemble des déploiements à celle d'un déploiement unique, qui est le plus grand (dans un sens à préciser) et qui donne naissance à tous les autres. Un tel déploiement est dit *versel*.

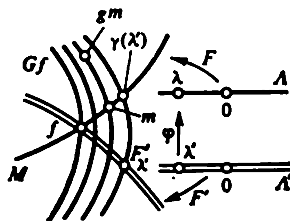


Fig. 44

La notion de déploiement versel a une grande importance en mathématiques et est largement utilisée. A titre d'exemple, considérons la réduction à la forme normale d'une matrice d'opérateur linéaire. La forme normale de Jordan est instable, en ce sens qu'en faisant bouger l'opérateur, la forme normale change brusquement, en même temps que la transformation réductrice. Le déploiement versel d'une matrice est une forme normale à laquelle on peut réduire non seulement la matrice en question mais toute une famille de matrices proches, par une transformation qui dépend différentiablement des paramètres (voir [10], [24], où sont donnés sous forme explicite les déploiements versels des matrices et leurs applications à la théorie des bifurcations des portraits de phases de systèmes dynamiques).

Les théorèmes qui vont suivre permettent de chercher sous forme explicite les déploiements versels des singularités dégénérées d'applications différentiables.

8.1. Définition du déploiement versel. Plaçons-nous pour commencer dans un espace de dimension finie. Soient G un groupe de Lie opérant sur une variété M, et f un point de M. On appelle *déploiement de* f le germe d'une application différentiable F d'une variété Λ (dite *base* du déploiement) dans M au point 0 de Λ, où $F(0) = f$ (fig. 44).

Considérons deux déploiements F, F' de même base Λ d'un même point f. On dit que F et F' sont *équivalents* s'ils se laissent réduire l'un à l'autre par l'action d'un élément $g(\lambda)$, du groupe G, dépendant différentiablement d'un élément $\lambda \in \Lambda$, i.e. si

$$F'(\lambda) = g(\lambda) F(\lambda),$$

où g est le déploiement de l'élément neutre du groupe.

Soit $\varphi: (\Lambda', 0) \to (\Lambda, 0)$ une application différentiable. On appelle *déploiement induit de F par* φ un déploiement φ^*F du point f de base Λ' tel que

$$(\varphi^*F)(\lambda') = F(\varphi(\lambda)).$$

On dit que F est un *déploiement versel de* f si tout déploiement de f s'avère équivalent à un déploiement induit de F.

Un déploiement versel est dit *miniversel* si la dimension de la base est minimale. On démontre sans peine le

Théorème. *Toute transversale minimale en f à l'orbite Gf de f dans M est un déploiement miniversel de f.*

Démonstration. Fixons une minitransversale $F: (\Lambda, 0) \to (M, f)$ et menons par le point neutre du groupe une transversale K au stabilisateur H_f de f. L'action du groupe G définit un germe d'application différentiable $\alpha: K \times F(\Lambda) \to M$ en $(e, 0)$: c'est le germe de difféomorphisme $(\alpha(g, m) = gm,\ g \in K,\ m \in F(\Lambda)$, fig. 44).

Soit $F': (\Lambda', 0) \to (M, f)$ un déploiement quelconque du point f. Introduisons les notations $\alpha^{-1}(F'(\lambda')) = (\beta(\lambda'), \gamma(\lambda')) \in K \times F(\Lambda)$, $F_0^{-1}\gamma = \varphi: (\Lambda', 0) \to (\Lambda, 0)$. Alors $F'(\lambda') = \beta(\lambda') \times F(\varphi(\lambda'))$, ce qu'il fallait démontrer.

Notre but est d'étendre ces constructions au cas où M est un espace fonctionnel d'applications différentiables et G un groupe de transformations de dimension infinie (fait de changements de variables indépendantes ou dépendantes, de multiplications par des fonctions, d'additions de fonctions, etc.). En parlant d'un déploiement versel, on doit indiquer chaque fois de quelle action (i.e. de quelles transformations permises) ou de quelle équivalence il s'agit.

Considérons par exemple le cas d'*équivalence à droite de fonctions*.

Soit $f: (\mathbf{R}^m, 0) \to \mathbf{R}$ un germe de fonction différentiable. On appelle *déploiement de* f de base $\Lambda = \mathbf{R}^l$ le germe en 0 d'une application différentiable $F: (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l, 0) \to \mathbf{R}$ telle que $F(x, 0) \equiv f(x)$. Un déploiement F' est équivalent (à droite) au déploiement F si

$$F'(x, \lambda) \equiv F(g(x, \lambda), \lambda),$$

où $g: (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l, 0) \to (\mathbf{R}^m, 0)$ est un germe différentiable, $g(x, 0) \equiv x$. On dit que F' est *induit de F* si

$$F'(x, \lambda') \equiv F(x, \varphi(\lambda')),$$

où $\varphi: (\mathbf{R}^{l'}, 0) \to (\mathbf{R}^l, 0)$ est un germe différentiable.

Ainsi donc, un déploiement F du germe f est *versel* (à droite, ou R-versel) si tout déploiement F' de f se laisse mettre sous la forme

$$F'(x, \lambda') \equiv F(g(x, \lambda'), \varphi(\lambda')), \quad g(x, 0) \equiv x, \quad \varphi(0) = 0. \quad (1)$$

Problème 1. Montrer que la déformation $x^2 + \lambda$ du germe x^2 en 0 est un déploiement R-versel.

Problème 2. Montrer que le germe de la fonction $f(x) \equiv 0$ n'admet aucun déploiement R-versel de dimension finie.

Dans le cas d'une *RL-équivalence*, la relation (1) devient

$$F'(x, \lambda') \equiv k(F(g(x, \lambda'), \varphi(\lambda')), \lambda'), \tag{2}$$

où $g(x, 0) \equiv x$, $k(y, 0) \equiv y$, $\varphi(0) = 0$.

Problème 3. Montrer que la déformation à 0 paramètres x^2 du germe x^2 est un déploiement RL-versel.

Deux déploiements F, F' d'un même germe f sont *V-équivalents* (cf. n° 6.5) si

$$F'(x, \lambda) \equiv M(x, \lambda) F(g(x, \lambda), \lambda).$$

Dans le même ordre d'idées, un déploiement F du germe f est *V-versel* si tout déploiement de f se laisse mettre sous la forme

$$F'(x, \lambda') = M(x, \lambda') F(g(x, \lambda'), \varphi(\lambda')), \tag{3}$$

où la matrice $M(0, 0)$ est non dégénérée, $g(x, 0) \equiv x$, $\varphi(0) = 0$.

Problème 4. Montrer que la déformation $x^2 + \lambda$ du germe x^2 est un déploiement V-versel.

8.2. Versalité infinitésimale. Le théorème du n° 8.1 exprime que la condition de versalité est vérifiée chaque fois que l'espace des vitesses du déploiement est transversal à l'orbite de l'action du groupe. Un théorème analogue reste vrai dans les espaces de dimension infinie qui nous intéressent.

Soit donné un groupe de transformations permises: difféomorphismes à droite ou à gauche, etc.

Définition. On appelle *espace tangent à l'orbite du germe f* l'espace vectoriel des vitesses de variation de f sous l'action des familles à un paramètre des transformations permises.

Remarque. Cette définition diffère de la définition habituelle en ce sens que le groupe en question n'opère en général pas sur l'espace considéré des germes en un point (car on admet des déplacements de l'origine dans le groupe).

Exemple 1. L'espace tangent à la R-orbite (orbite de l'action des changements à droite) du germe de l'application $f: (\mathbf{R}^m, 0) \to \mathbf{R}^n$ est un A_x-module de fonctions qu'on peut mettre sous la forme

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) h_i(x)$$

(cf. n° 6.6).

Exemple 2. L'espace tangent à la *RL*-orbite du même germe se compose de toutes les variations de f telles que

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) h_i(x) + k(f(x))$$

(cf. n° 6.6). Cet espace vectoriel est un A_y-module mais non un A_x-module.

Exemple 3. L'espace tangent à la *V*-orbite du même germe se compose de toutes les variations de f telles que

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) h_i(x) + \sum f_j(x) k_j(x)$$

(cf. n° 8.1 et n° 6.6). C'est un A_x-module.

Soit F un déploiement du germe f de base Λ, et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ des coordonnées sur la base, $\lambda(0) = 0$. On appelle *vitesses initiales du déploiement* F les germes

$$\dot{F}_i = \left.\frac{\partial F(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_l)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=0}, \quad i = 1, \ldots, l.$$

Exemple. Soit $F(x, \lambda) = x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$ un déploiement du germe $f(x) = x^3$ en 0. Les vitesses initiales de ce déploiement sont $\dot{F}_1 = x$, $\dot{F}_2 = 1$.

Définition. Un déploiement F d'un germe f est dit *infinitésimalement versel*, ou *inf-versel*, si ses vitesses initiales engendrent, avec l'espace tangent à l'orbite de f, l'espace vectoriel tout entier des variations de f.

Exemple. Le déploiement $F(x, \lambda) = x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$ du germe $f(x) = x^3$ en 0 est un déploiement inf-versel à droite. En effet, l'espace tangent à l'orbite des changements à droite est $\mathfrak{m}_x^2$ (la totalité des germes de la forme $3x^2 \cdot h(x)$, où h est un germe différentiable). Or, tout germe de fonction différentiable en 0 se laisse mettre sous la forme $\alpha(x) = 3x^2 h(x) + c_1 x + c_2 \cdot 1$.

Théorème. *Les conditions de versalité infinitésimale d'un déploiement F d'un germe f: $(\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ pour l'équivalence à droite, l'équivalence à gauche et à droite et la V-équivalence consistent en ce que toute variation α de f admet les représentations*

$$\alpha(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i(x) + \sum_{i=1}^{l} c_i \dot{F}_i(x) \qquad (R\text{-versalité});$$

$$\alpha(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i(x) + k(f(x)) + \sum_{i=1}^{l} c_i \dot{F}_i(x) \qquad (RL\text{-}versalité);$$

$$\alpha(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i(x) + \sum_{j=1}^{n} f_j(x) k_j(x) + \sum_{i=1}^{l} c_i \dot{F}_i(x) \quad (V\text{-}versalité).$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de faire la dérivation des définitions de la versalité (1), (2), (3) du n° 8.1. On montre par là même que tout déploiement versel est inf-versel.

Exemple. La déformation $x^3 + \lambda x$ du germe x^3 en 0 est un déploiement infinitésimalement RL-versel sans être infinitésimalement R- ni V-versel.

8.3. Théorème de la versalité. Pour chaque cas d'équivalence (R-, RL- et V-) on a le

Théorème. *Tout déploiement inf-versel est versel.*

Exemple. Comme déploiement R-versel d'un germe d'application différentiable f, on peut prendre le déploiement $F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 e_1(x) + \ldots + \lambda_\mu e_\mu(x)$, où les germes des fonctions e_k en 0 définissent une base d'espace vectoriel

$$Q_f = \mathbf{R}\,[[x_1, \ldots, x_m]]/(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_m).$$

En particulier, la déformation $x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$ du germe x^3 en 0 est un déploiement R-versel.

Puisque la démonstration reste à peu près la même pour tous les trois cas, nous nous bornons à considérer le cas de la V-équivalence. Le théorème de la V-versalité en cas analytique appartient à G. Tyurina [281], qui a étudié d'ailleurs aussi un problème plus général sur des déploiements de bases non différentiables *).

La démonstration qui suit est due à J. Martinet [203]. Elle est fondée sur la construction suivante.

---

*) Le théorème de versalité pour les intersections complètes de dimension nulle est en fait déjà contenu dans la thèse de H. Poincaré *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles* [246]. Le lemme IV qu'on trouve à la page 14 de la Thèse (entré plus tard au p. 33, t. I, de ses *Nouvelles méthodes de mécanique céleste*) affirme, en termes des mathématiques d'aujourd'hui, aussi bien la V-détermination finie que l'existence de la déformation V-verselle paramétrique finie des germes d'intersections complètes holomorphes de dimension nulle. (Poincaré prouve même plus, puisqu'il n'utilise pas de difféomorphismes à droite.)

Soit F un déploiement infinitésimalement V-versel d'un germe f, et soit Φ un déploiement 1-paramétrique quelconque du germe F:

$$\Phi(x, \lambda, 0) \equiv F(x, \lambda), \quad F(x, 0) \equiv f(x),$$
$$\Phi: (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0).$$

On peut assimiler Φ à un déploiement $(l+1)$-paramétrique du germe f d'une fonction de $x \in \mathbf{R}^m$ aux paramètres $\lambda \in \mathbf{R}^l$, $u \in \mathbf{R}$.

Lemme (de la réduction). *Le déploiement Φ du germe f est V-équivalent à un déploiement induit de F.*

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. Construisons un germe de champ de vecteurs v au point 0 de l'espace (x, λ, u), tel que

1) $v = \dfrac{\partial}{\partial u} + \Xi(\lambda, u)\dfrac{\partial}{\partial \lambda} + H(x, \lambda, u)\dfrac{\partial}{\partial x}$;

2) $v\Phi = A\Phi$, où A est un germe de fonction matricielle différentiable de x, λ, u.

D'après 1), les trajectoires d'un tel champ sont transversales à l'hyperplan $u = 0$ et définissent au voisinage de 0 un fibré différentiable d'un espace de dimension $m + l + 1$ au-dessus d'un espace de dimension $m + l$. On peut décrire ce fibré comme suit. Associons à chaque point de (x, λ, u) l'intersection de la trajectoire passant par ce point avec le plan $u = 0$. Désignons les x- et λ-coordonnées du point d'intersection par g et φ. Conformément à la condition 1), le fibré construit s'écrit sous la forme $(x, \lambda, u) \mapsto (g(x, \lambda, u), \varphi(\lambda, u))$. De la condition 2) on voit que g définit la V-équivalence de Φ à un déploiement induit de F par φ (la matrice nécessaire M s'obtient en intégrant l'équation linéaire de second membre A suivant les trajectoires).

Il ne reste donc, pour démontrer le lemme, qu'à construire un champ v possédant les propriétés 1) et 2). Autrement dit, il faut que l'équation homologique

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}\,\Xi(\lambda, u) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} H(x, \lambda, u) = A(x, \lambda, u)\,\Phi(x, \lambda, u)$$

soit résoluble par rapport aux inconnues Ξ, H, A.

Toute variation α de f admet un développement qui confirme la V-versalité infinitésimale:

$$\alpha(x) = \frac{\partial f}{\partial x} h(x) - a(x) f(x) + \sum_{i=1}^{l} \dot{F}_i(x)\,\xi_i, \quad \xi_i \in \mathbf{R}.$$

Par conséquent, toute variation $\alpha(x, \lambda, u)$ du germe de Φ admet un développement

$$\alpha(x, \lambda, u) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} h(x) - a(x)\,\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}\,\xi +$$
$$+ [u\alpha_0(x, \lambda, u) + \sum \lambda_i \alpha_i(x, \lambda, u)]\cdot$$

Développons de cette manière α_0 et α_i et portons les développements obtenus daus cette formule. Nous obtiendrons un développement amélioré dans lequel le résidu entre crochets sera déjà un petit d'ordre 2 en u et λ ; en revanche, au lieu des coefficients $h(x)$, $a(x)$ et ξ nous aurons des fonctions linéaires non homogènes de λ et de u.

Au bout d'un nombre infini d'améliorations du type décrit, nous aurons abouti à un développement

$$\alpha(x, \lambda, u) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} H(x, \lambda, u) - A(x, \lambda, u)\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \Xi(\lambda, u) \quad (*)$$

au niveau des séries formelles.

Le théorème de préparation (voir n° 6.6, p. 108) montre que le développement (*) existe tant pour les séries convergentes que pour le cas C^∞ [ce théorème doit être appliqué à l'$A_{x,\lambda,u}$-module $(A_{x,\lambda,u})^n/\{\partial\Phi/\partial x_i, \Phi_i e_j\}$, à l'application $(x, \lambda, u) \mapsto (\lambda, u)$ et aux générateurs $\partial\Phi/\partial\lambda_i$]. Le développement (*) de $\alpha = -\partial\Phi/\partial u$ fournit la solution cherchée de l'équation homologique. Le lemme est démontré.

Démonstration du théorème. Soient F' un déploiement (arbitraire) d'un germe f de paramètre $\lambda' \in \mathbf{R}^{l'}$, et F un déploiement infinitésimalement versel de f de paramètre $\lambda \in \mathbf{R}^l$. Faisons leur « somme », i.e. un déploiement $\hat{F}(x, \lambda, \lambda') \equiv \equiv F(x, \lambda) + F'(x, \lambda') - f(x)$ de paramètre (λ, λ') de dimension $l + l'$.

Pour $\lambda' = 0$ le déploiement $\hat{F}$ se réduit à F, et pour $\lambda = 0$, à F'. Le plongement d'une sous-variété dans la base du déploiement induit un déploiement de base la sous-variété plongée ; le déploiement initial (de base plus grande) sera appelé *extension* du déploiement de base plus petite. Remarquons que *l'extension d'un déploiement inf-versel est inf-verselle* (car l'ensemble des vitesses initiales ne fait qu'augmenter par une extension). Considérons à présent une suite de sous-espaces emboîtés $\mathbf{R}^l \subset \mathbf{R}^{l+1} \subset \ldots \subset \mathbf{R}^{l+l'}$ dont le premier est la base de F et le dernier, celle de $\hat{F}$. Les restrictions de $\hat{F}$ à ces sous-espaces sont inf-stables. Par applications successives du lemme de la réduction, on montre que le déploiement $\hat{F}$ est équivalent à un déploiement induit de F. Or, le déploiement F' est induit de $\hat{F}$, donc F' est équivalent lui aussi à un déploiement induit de F. Le théorème de la versalité est démontré.

8.4. Remarques sur le théorème de la versalité.

Remarque 1. Dans le cas de l'équivalence à gauche et à droite, on est amené à chercher, au lieu du développement (*) du nº 8.3, un développement de la forme

$$\alpha(x, \lambda, u) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} H(x, \lambda, u) + K(\Phi, \lambda, u) + \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\Xi(\lambda, u). \quad (**)$$

Commençons par le développement de la versalité infinitésimale

$$\alpha(x) = \frac{\partial f}{\partial x} h(x) + k(f(x)) + \sum \dot{F}_i\xi_i.$$

De ce développement nous déduisons

$$\alpha(x, \lambda, u) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} h(x) + k(\Phi(x, \lambda, u)) + \\ + \sum \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_i}\xi_i + \Big[u\alpha_0(x, \lambda, u) + \sum \lambda_i\alpha_i(x, \lambda, u)\Big].$$

En développant α_0 et α_i de la même manière et en portant leurs développements dans cette formule, nous augmentons l'ordre en u et λ du terme résiduel, auquel cas $h(x)$ se transforme en $H(x, \lambda, u)$, $k(y)$ en $K(y, \lambda, u)$ et ξ en $\Xi(\lambda, u)$.

[Le théorème de préparation sera appliqué ici à l'$A_{y, \lambda, u}$-module $(A_{x, \lambda, u})^n \Big/ \Big\{\frac{\partial\Phi}{\partial x} H(x, \lambda, u) + K(\Phi(x, \lambda, u), \lambda, u\Big\}$, à l'application $(y, \lambda, u) \mapsto (\lambda, u)$ et aux générateurs $\partial\Phi/\partial\lambda_i$.]

Remarque 2. Si le germe considéré f est inf-stable, on peut prendre comme son déploiement versel sa déformation 0-paramétrique qui se réduit à f lui-même. Le théorème de la versalité exprime donc que *toute déformation d'un germe inf-stable est triviale*: l'application déformée admet en un certain point un germe équivalent au germe non déformé.

Malheureusement, déduire de cette *stabilité par déformation* (trivialité de toute déformation) la stabilité tout court n'est pas une entreprise facile.

Soit $\{f_t\}$ une famille différentiable reliant une application f_0 et une application f_1 proche de f_0. Si le germe de f_0 en 0 est stable par déformation, l'application f_t admet en un point proche de 0, pour t petit, un germe équivalent à celui de f_0 en 0. Or, même si f_1 est proche de f_0, il n'est pas évident que les applications f_t conservent cette propriété jusqu'à $t = 1$. En réalité, la stabilité par déformation (DS), la stabilité infinitésimale (IS) et la stabilité tout court

(S) sont équivalentes: nous venons de démontrer l'implication IS ⇒ DS, et l'implication IS ⇒ S a été démontrée au § 7. La réciproque est plus facile à démontrer mais dénuée d'intérêt (en effet, comment pourrait-on savoir qu'un germe est stable?).

Remarque 3. De même que la stabilité par déformation équivaut à la stabilité tout court, la versalité d'un déploiement est équivalente à une propriété plus forte de *stabilité du déploiement*: pour tout représentant F: $(U, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ d'un germe F il existe un voisinage E de ce représentant dans l'espace des applications différentiables de U tel que pour toute application F': $U \to \mathbf{R}^n$ de E il existe un point $0'$ en lequel le germe F' définit un déploiement équivalent à celui de F en 0 d'un germe f' équivalent à f.

Il y a plus: si l'application F' dans U est suffisamment proche de F, le point $0'$ peut être aussi proche de 0 que l'on veut et l'équivalence peut être aussi proche que l'on veut de l'identité.

La stabilité du déploiement versel se démontre comme le théorème de la stabilité ordinaire du § 7, quitte à remarquer que la versalité d'une famille est équivalente à la transversalité à l'orbite dans un espace de jets convenable.

8.5. Unicité du déploiement versel.

Théorème. *Tout déploiement versel l-paramétrique d'un germe f est équivalent à un déploiement induit de tout autre déploiement versel à l paramètres par une application difféomorphe des bases.*

Montrons-le pour la V-versalité, car nous aurons besoin de ce cas ultérieurement.

Soit l la dimension minimale de la base du déploiement V-versel, i.e. dimension de l'espace vectoriel

$$T = (A_x)^n \Big/ \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}, \ f_i e_j \right\}.$$

Désignons par π la projection de l'espace des variations $(A_x)^n$ sur T.

Pour qu'un déploiement l-paramétrique F soit versel, il faut et il suffit que T soit engendré par l vecteurs $\pi \dot{F}_i$.

Un déploiement quelconque F' du germe f est équivalent à un déploiement induit du déploiement versel, i.e.

$$F'(x, \lambda) \equiv M(x, \lambda) F(g(x, \lambda), \varphi(\lambda)),$$
$$g(x, 0) \equiv x, \quad \varphi(0) = 0, \quad M(x, 0) f(x) \equiv f(x).$$

Dérivons par rapport à λ_i en 0. Il vient

$$\dot{F}'_i = \dot{M}_i f + M(x, 0) \frac{\partial f}{\partial x} \dot{g}_i + M(x, 0) \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_0 \dot{\varphi}_i \quad \left(\dot{z}_i = \left. \frac{\partial z}{\partial \lambda_i} \right|_{\lambda=0} \right).$$

Remarquons que, puisque $F'(x, 0) \equiv F(x, 0) \equiv f(x)$, on a

$$\frac{\partial M(x, 0)}{\partial x_i} f + M(x, 0) \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Par conséquent, $M(x, 0) \frac{\partial f}{\partial x_i}$ appartient à l'A_x-module $\{\partial f/\partial x, f_i e_j\}$.

Donc

$$\pi \dot{F}'_i = \pi \left(M(x, 0) \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) \Big|_0 \dot{\varphi}_i \Big) .$$

Si les l vecteurs $\dot{\varphi}_i$ étaient dépendants, les l vecteurs $\pi \dot{F}'_i$ seraient dépendants eux aussi, ce qui est contradictoire avec la versalité de F'. Donc les φ sont des difféomorphismes. Cela démontre notre proposition pour les déploiements miniversels.

Si le nombre de paramètres de F' est supérieur au minimal, le raisonnement ci-dessus montre que le déploiement F' est équivalent à un déploiement induit du déploiement miniversel l-paramétrique par l'application des bases de rang l.

Tous les déploiements F' ainsi obtenus à un nombre de paramètres fixé se laissent réduire facilement l'un à l'autre par des difféomorphismes de la base et par des équivalences.

8.6. Déploiements des germes équivalents.

Théorème. *Deux déploiements versels F, F' ayant même nombre l de paramètres de deux germes V-équivalents f, f' : $(\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ sont V-équivalents au sens suivant : il existe un germe de difféomorphisme H : $(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l, 0) \to (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l, 0)$ de la forme $(x, \lambda) \mapsto (h(x, \lambda), \varphi(\lambda))$ et un germe de matrice inversible M : $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l \to \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ en 0, tels que*

$$F'(x, \lambda) \equiv M(x, \lambda) F(h(x, \lambda), \varphi(\lambda)).$$

Démonstration. Par définition $f'(x) \equiv M(x) f(g(x))$. La même « transformation (M, g) » appliquée au déploiement versel F de f nous donne un déploiement l-paramétrique F'' du germe f', à savoir $F''(x, \lambda) \equiv M(x) F(g(x), \lambda)$. Le déploiement F'' de f' est versel, parce que le déploiement F de f l'est (car la transformation (M, g) envoie les déploiements de f équivalents à des déploiements induits de F sur des déploiements de f' équivalents à des déploiements induits de F'') *). D'après le théorème du nº 8.5, le déploiement F' est équivalent à un déploiement induit de F'' par un difféomorphisme, à savoir $F'(x, \lambda) = M'(x, \lambda) F''(g'(x, \lambda), \varphi(\lambda))$. Remplaçant F'' par sa définition, nous obtenons le développement cherché.

---

*) Il en découle en particulier que les bases des déploiements miniversels de deux germes V-équivalents ont même dimension.

§ 9. Classification des germes stables suivant les génotypes

Nous démontrerons un théorème de Mather qui réduit la classification des germes RL-stables à la V-classification des germes d'applications d'espaces de dimension plus petite (cf. [205]).

9.1. Les germes RL-stables V-équivalents sont RL-équivalents. Soit $f: (\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ un germe d'application différentiable. Considérons son déploiement n-paramétrique

$$F(x, \lambda) \equiv f(x) - \lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}^n.$$

L'ensemble des zéros de ce déploiement (i.e. $F^{-1}(0) \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$) est le graphe de f. On a évidemment le

Théorème. *Le déploiement F est V-versel si et seulement si le germe f est RL-stable.*

Démonstration. Pour que le germe f soit (infinitésimalement) RL-stable, il faut que toute variation α de f admette un développement (voir § 7)

$$\alpha(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} h(x) + \sum f_i(x) k_i(x) + \sum c_i e_i,$$

où $e_1, \ldots, e_n$ forment une base dans $\mathbf{R}^n$. Or, les vitesses initiales de F sont précisément égales aux $-e_i$, aussi la condition de V-versalité (infinitésimale) du déploiement F de f implique-t-elle l'existence d'un développement identique (n° 8.2). Le théorème est démontré.

Théorème. *Soient f et f' : $(\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ deux germes RL-stables V-équivalents. Alors f et f' sont RL-équivalents.*

Démonstration. Faisons des déploiements versels $F(x, \lambda) \equiv f(x) - \lambda$, $F'(x, \lambda) \equiv f'(x) - \lambda$. D'après le théorème du n° 8.6, il existe un difféomorphisme local H de l'espace $\{(x, \lambda)\}$ contenant le graphe de f sur un espace contenant le graphe de f', difféomorphisme fibré au-dessus de l'espace des valeurs $\mathbf{R}^n$ (i.e. un difféomorphisme qui fait revenir la famille de plans $\lambda = \mathrm{Cte}$ à elle-même) et envoyant le graphe de f sur le graphe de f'. C'est justement H qui induit les difféomorphismes des espaces sources et buts transformant f en f' (le difféomorphisme des espaces sources se déduit de celui des graphes en remplaçant les points $(x, f(x))$ et $(x', f'(x'))$ des graphes par leurs projections x et x' respectivement).

9.2. Classification des germes stables suivant leurs idéaux. Soit $f: (\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ un germe d'application différentiable. L'algèbre $\mathbf{R}$-locale $Q(f)$ de f se définit par la suite exacte

$$0 \to I_f \to A_x \to Q(f) \to 0 \tag{1}$$

dans laquelle I_f est l'idéal défini par les composantes de f dans l'algèbre des germes de fonctions (ou de séries) de x.

Si f' est un germe V-équivalent à f, les suites exactes correspondant à f et f' sont équivalentes, i.e. on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I_f & \to & A_x & \to & Q(f) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & I_{f'} & \to & A_x & \to & Q(f') & \to & 0 \end{array} \tag{2}$$

dans lequel les flèches verticales figurent les isomorphismes des **R**-algèbres. Les résultats du n° 9.1 s'énoncent alors sous forme équivalente :

Théorème. *La classe de RL-équivalence d'un germe RL-stable f se définit de façon unique par l'idéal I_f aux équivalences* (2) *près des suites* (1).

Remarque. Puisque tout germe stable est $n+1$-déterminé, il se définit même par la classe de I_f mod $\mathfrak{m}_x^{n+2}$. Cette forme plus forte du théorème devient essentielle quand $m > n$, car dans ce cas le **R**-espace $Q(f)$ est de dimension infinie et $Q_{n+1}(f) = A_x/(I_f + \mathfrak{m}_x^{n+2})$ est de dimension finie. On montre de même qu'un germe stable f se définit par I_f mod $\mathfrak{m}_x^{r+3}$, où r est le rang de la différentielle de f en 0. On peut faire mieux et montrer que la classe de RL-équivalence d'un germe RL-stable f: $(\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ se définit par m, n et par la **R**-algèbre locale $Q_{r+2}(f)$ elle-même à l'isomorphisme des **R**-algèbres près et non seulement aux équivalences (2) près. Voir la démonstration par exemple dans [205], [203].

9.3. Construction des germes stables. On se demande si toute **R**-algèbre locale Q de dimension finie peut se présenter comme $Q_{n+1}(f)$ pour un germe stable f? La réponse est affirmative.

Soit φ: $(\mathbf{R}^s, 0) \to (\mathbf{R}^t, 0)$ un germe d'application différentiable possédant un déploiement V-versel de dimension finie *). Cela revient à supposer que l'espace quotient

$$T = A_x^t \Big/ \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \varphi_i e_j \right\}$$

soit de dimension finie. Supposons en outre que la dérivée de φ en 0 soit nulle. On peut alors prendre pour base de T, t images de vecteurs de base e_j plus r images d'un nombre fini de « colonnes » $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ s'annulant en 0 (on peut même prendre toujours comme α_i des colonnes monômes).

*) *s* pour *source* et *t* pour *but* (*target* en anglais).

Définition. On appelle *suspension de* φ le germe d'application $f: (\mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^r, 0) \to (\mathbf{R}^t \times \mathbf{R}^r, 0)$, $(x, \lambda) \mapsto (y, z)$, défini par

$$\begin{cases} y = \varphi(x) + \sum_{p=1}^{r} \lambda_p \alpha_p(x), \\ z = \lambda. \end{cases} \tag{3}$$

Le germe φ est alors le *génotype* de f.

Exemple. Soient $s = t = 1$, et soit le génotype $\varphi(x) \equiv x^3$. L'espace quotient $\mathbf{R}[[x]]/\{3x^2, x^3\}$ est engendré par les images des colonnes de hauteur 1 $e_1 = 1$, $\alpha_1 = x$. Par conséquent, la suspension se définit par $y = x^3 + \lambda x$, $z = \lambda$. *En construisant la suspension du génotype x^3 en 0, nous avons donc obtenu un germe d'application de Whitney au point fronce.*

Problème. Construire les suspensions des génotypes $\varphi_\pm: (\mathbf{R}^2, 0) \to (\mathbf{R}^2, 0)$, où $\varphi_1 = x_1^2 \pm x_2^2$, $\varphi_2 = x_1 x_2$.

Théorème. *La suspension est stable, et sa* R-*algèbre locale est isomorphe à la* R-*algèbre de son génotype*: $Q(f) \cong Q(\varphi)$, $Q_k(f) \cong Q_k(\varphi)$.

9.4. Démonstration du théorème sur la suspension. Calculons la R-algèbre $Q(f)$:

$$\mathbf{R}[[x, \lambda]]/\{\varphi_i + \sum \lambda_k \alpha_{k,i}, \lambda_p\} \cong \mathbf{R}[[x]]/\{\varphi_i\}.$$

Montrons maintenant que f est infinitésimalement V-stable. Il s'agit de résoudre, pour toute colonne de variations $(\delta y, \delta z)$ de hauteur $t + r$ de fonctions de x et λ, l'équation

$$\begin{pmatrix} \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial(\varphi + \sum \lambda_k \alpha_k)/\partial x & \alpha \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \sum_i \left(\varphi_i + \sum \lambda_k \alpha_{k,i}\right) \begin{pmatrix} g_{i,1} \\ g_{i,2} \end{pmatrix} + \sum_p \lambda_p \begin{pmatrix} \tilde{g}_{p,1} \\ \tilde{g}_{p,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

par rapport aux colonnes h, g_i, $\tilde{g}_p$ de fonctions de x et λ et à la colonne numérique c.

On peut annuler tous les termes en λ par un choix judicieux de $\tilde{g}$. Il suffit donc de résoudre, pour toute colonne de variations $(\delta y, \delta z)$ dépendant de x seulement, l'équation

$$\begin{pmatrix} \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial\varphi/\partial x) & \alpha \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \sum_i \varphi_i \begin{pmatrix} g_{i,1} \\ g_{i,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

par rapport aux colonnes h, g_i de fonctions de x et à la colonne numérique c. Mettons cette équation sous la forme d'un système

$$\begin{cases} \delta y = (\partial\varphi/\partial x)\, h_1 + \alpha h_2 + \sum_i \varphi_i g_{i,1} + c_1, \\ \delta z = h_2 + \sum_i \varphi_i g_{i,2} + c_2. \end{cases}$$

Portant dans la première équation l'expression de h_2 déduite de la seconde, nous obtenons une équation par rapport à h_1, g_i et c:

$$\delta y - \alpha\delta z = (\partial\varphi/\partial x)\, h_1 + \sum_i \varphi_i (g_{i,1} - \alpha g_{i,2}) + (c_1 - \alpha c_2).$$

Posons $g_{i,2} = 0$. Remarquons que la colonne c_1 est la combinaison linéaire numérique générale des t vecteurs de base e_k, et la colonne αc_2 celle des r colonnes choisies α_p. Or, les images de tous les e_k et α_p engendrent T. Cela signifie que les équations de la forme $\beta = (\partial\varphi/\partial x)\, h_1 + \sum \varphi_i g_i + (c_1 - \alpha c_2)$ sont résolubles par rapport à h, g_i et c. Notre équation est donc bien résoluble. Par conséquent, le germe f est infinitésimalement V-stable, donc aussi stable (§ 7).

9.5. La préforme normale. Soit $f\colon (\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ un germe d'application différentiable, et soit r le rang de sa différentielle en 0. Soient $s = m - r$ et $t = n - r$ les corangs dans la source et dans le but respectivement.

Proposition. *On peut introduire des coordonnées dans la source et dans le but de telle façon que f soit défini par*

$$\begin{cases} y = \varphi(x, \lambda), & (x, \lambda) \in (\mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^r = \mathbf{R}^m), \\ z = \lambda, & (y, z) \in (\mathbf{R}^t \times \mathbf{R}^r = \mathbf{R}^n), \end{cases} \tag{4}$$

où φ est petit d'au moins ordre 2 *en* 0: $\varphi(0, 0) = 0$, $d\varphi(0, 0) = 0$.

Remarque. Autrement dit, une application f de rang non nul se laisse représenter localement par une famille d'applications d'espaces de dimension plus petite; la dimension de l'espace des paramètres est égale au rang, et celles des espaces mentionnés de dimensions plus petites, aux corangs. On dit aussi que f est le *développement* de $\mathring{\varphi}\colon (\mathbf{R}^s, 0) \to (\mathbf{R}^t, 0)$, $\mathring{\varphi}(x) = \varphi(x, 0)$, $\mathring{\varphi}$ étant le *génotype* de f.

Démonstration. La proposition découle du théorème de la fonction implicite. En effet, l'image de la différentielle de f en 0 est un sous-espace de dimension r de $\mathbf{R}^n$. Soient $z_1, \ldots, z_r$ des fonctions dans $\mathbf{R}^n$ qui définissent un système de coordonnées dans le sous-espace en question. L'application f transporte les fonctions z_k dans l'espace source $\mathbf{R}^m$; désignons les fonctions transportées par $\lambda_k = f^* z_k$. Les différentielles de ces r fonctions en 0 sont indépen-

dantes. On peut donc les compléter en un système de coordonnées dans l'espace source en ajoutant s coordonnées x_l. De même, on peut compléter les fonctions z_k en un système de coordonnées dans $\mathbf{R}^n$ en choisissant des coordonnées y_j de telle façon que leurs différentielles en 0 s'annulent sur l'image de la différentielle de f. Le système de coordonnées obtenu possède toutes les propriétés requises.

Théorème (de la stabilité de la préforme normale). *Le germe d'application* (4) *en* 0 *est RL-stable si et seulement si les images des vecteurs de base* $e_j = \partial/\partial y_j$ *et des r colonnes* $\dot{\varphi}_k = \partial\varphi/\partial\lambda_k|_{\lambda=0}$ *engendrent l'espace vectoriel* $T = A_x^t \Big/ \left\{\frac{\partial\overset{\circ}{\varphi}}{\partial x}, \overset{\circ}{\varphi}_l e_j\right\}$ *défini d'après le génotype* $\overset{\circ}{\varphi}(x) \equiv \equiv \varphi(x, 0)$.

La formule (4) est une généralisation aux déploiements non linéaires de la formule (3) où la dépendance des paramètres λ était supposée linéaire. La stabilité du germe d'application (4) est étudiée de la même façon que pour la suspension.

La démonstration ne diffère pas de celle du théorème de la stabilité de la suspension (n° 9.4).

Définition. On appelle *extension triviale p-paramétrique d'un germe* f: $(\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ le germe d'application

$$F: (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^p, 0) \to (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, 0), \quad F(x, u) \equiv (f(x), u).$$

Il est évident que la stabilité est conservée par l'extension triviale (elle ne peut ni disparaître ni apparaître).

Théorème. *Le germe RL-stable* (4) *est RL-équivalent à la suspension de son génotype* $\overset{\circ}{\varphi}$ *ou à une extension triviale de la suspension* (*si* $r + t >$ dim T, *alors l'extension est* $r + t -$ dim T*-paramétrique*).

D é m o n s t r a t i o n. En effet, le germe de la suspension qui a subi une extension est RL-stable d'après les théorèmes des n°s 9.3 et 9.5. Il est V-équivalent au germe (4), car les deux germes définissent des idéaux qui se confondent: $I_{\varphi, \lambda} = I_{\overset{\circ}{\varphi}, \lambda}$. D'après le théorème 9.1, ces germes sont RL-équivalents.

Ce théorème réduit la recherche des formes normales de germes stables $(\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ au problème beaucoup plus simple de V-classification de leurs génotypes, i.e. des germes d'applications d'espaces de dimensions plus petites. En effet, la classe de RL-équivalence de la suspension ne varie pas quand on remplace le génotype $\overset{\circ}{\varphi}$ par un germe V-équivalent (théorèmes des n°s 9.1 et 9.3). Réciproquement, deux suspensions RL-équivalentes sont V-équivalentes, si bien que les génotypes correspondants sont V-équivalents.

9.6. Germes stables de corang 1.

Théorème (Morin [222]). *Un germe stable* $f\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ *dont les corangs sont égaux à* 1 *est RL-équivalent à une extension triviale du germe de la fronce de Whitney généralisée*:

$$\begin{cases} y = x^k + \lambda_1 x^{k-2} + \ldots + \lambda_{k-2} x, \\ z = \lambda \end{cases} \quad (k \leqslant n+1).$$

D é m o n s t r a t i o n. Dans ce cas le génotype $\mathring{\varphi}$ est fonction d'une variable. Soit k son ordre en 0. On met alors $\mathring{\varphi}$ facilement sous la forme x^k. D'après le théorème précédent, le germe f est équivalent au germe (ayant subi une extension triviale) de la suspension de x^k. D'où l'on déduit l'inégalité $k \leqslant n+1$ qui démontre le théorème.

Théorème (Morin [222]). *Un germe stable* $f\colon (\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ *de corang* 1 *dans la source est RL-équivalent à une extension triviale du germe du parapluie de Whitney généralisé*:

$$\begin{cases} y_1 = x^k + \quad 0 \quad + \lambda_{1,2} x^{k-2} + \ldots + \lambda_{1,k-1} x, \\ y_2 = \qquad \lambda_{2,1} x^{k-1} + \lambda_{2,2} x^{k-2} + \ldots + \lambda_{2,k-1} x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_t = \qquad \lambda_{t,1} x^{k-1} + \lambda_{t,2} x^{k-2} + \ldots + \lambda_{t,k-1} x, \\ z = \qquad \lambda \qquad\qquad\qquad t(k-1) \leqslant m. \end{cases}$$

Remarque. Dans les conditions du théorème, $m \leqslant n$, $r = m - 1$, $t = n - r = n - m + 1$.

Exemple. Soient $m = 2$, $n = 3$. Alors $r = 1$, $t = 2$, donc $k = 2$. D'où $y_1 = x^2$, $y_2 = \lambda x$, $z = \lambda$, ce qui nous donne un parapluie ordinaire (cf. fig. 19).

D é m o n s t r a t i o n. Dans le cas considéré le génotype $\mathring{\varphi}\colon (\mathbf{R}, 0) \to (\mathbf{R}^t, 0)$ est une courbe gauche. Soit k l'ordre de $\mathring{\varphi}$ en 0. Le premier terme non nul du développement taylorien de $\mathring{\varphi}$ en 0 est de la forme $x^k e$, $e \neq 0$. Orientons l'axe des y_1 dans $\mathbf{R}^t$ parallèlement à e. Les équations de $\mathring{\varphi}$ s'écriront sous la forme $y_1 = x^k(1 + \ldots)$, $y_i = x^{k+1} c_i$ $(i \geqslant 2)$. Un tel génotype $\mathring{\varphi}$ est V-équivalent à $y_1 = x^k$, $y_2 = \ldots = y_t = 0$. Construisons la suspension de ce génotype. Le module $\left\{\frac{\partial\mathring{\varphi}}{\partial x}, \mathring{\varphi}_i e_j\right\}$ est engendré par les colonnes $(x^{k-1}e_1, x^k e_2, \ldots, x^k e_t)$. Par conséquent, la base dans T est formée

par les projections dans T des colonnes

$$e_1, \; xe_1, \; \ldots, \; x^{k-2}e_1; \; e_2, \; xe_2, \; \ldots, \; x^{k-1}e_2; \; \ldots; \; e_t, \; xe_t, \; \ldots, \; x^{k-1}e_t.$$

Cela nous conduit à la suspension énoncée dans le théorème.

Le nombre de colonnes complémentaires de celles de base ($e_1, \ldots$ $\ldots, e_t$) est égal à $t(k-1)-1$. Il en découle que le rang de la suspension est égal à $t(k-1)-1$. La dimension m de la source est d'une unité supérieure au rang. La condition de stabilité entraîne donc l'inégalité $m \geqslant t(k-1)$. Le théorème est démontré.

Considérons maintenant les applications stables de corang 1 dans la source ($t=1$). Dans ce cas le génotype $\overset{\circ}{\varphi}: (\mathbf{R}^s, 0) \to (\mathbf{R}, 0)$ est une fonction de $s = m - n + 1$ variables.

Théorème (Morin [222]). *Supposons que le génotype soit une fonction de s variables dont le corang de la différentielle seconde en* 0 *est* 1. *Tout germe stable* $(\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ *admettant un tel génotype est RL-équivalent à une extension triviale de la combinaison suivante des singularités de Whitney et de Morse:*

$$\begin{cases} y = x_1^k + \lambda_1 x_1^{k-2} + \ldots + \lambda_{k-2} x_1 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm \ldots \pm x_s^2 \\ z = \lambda \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k \leqslant n+1). \end{cases}$$

Exemple. Soient $m=3$, $n=2$, alors $s=2$ et $k=2$ ou 3. Les formes normales correspondantes s'écriront

$$y = x_1^2 \pm x_2^2, \; z = \lambda \; (k=2) \text{ et } y = x_1^3 + \lambda x_1 \pm x_2^2, \; z = \lambda \; (k=3).$$

On peut considérer ces formes normales comme définissant des métamorphoses sur les familles de courbes de niveau de la fonction

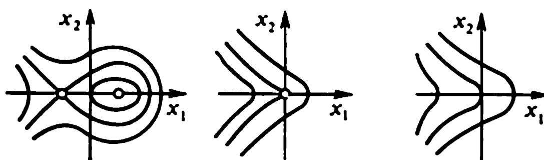


Fig. 45

$y(x_1, x_2)$ en cas de variation du paramètre λ. La métamorphose pour le cas $k=3$ est montrée sur la figure 45.

Démonstration. On démontre sans peine le

Lemme. *Dans les conditions du théorème, le génotype est V-équivalent à la forme normale*

$$y = x_1^k \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_s^2.$$

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. Introduisons des coordonnées sur la source de façon à mettre la différentielle seconde du génotype sous forme canonique. Il vient

$$\mathring{\varphi} = \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_s^2 + O\left(|\,x\,|^3\right).$$

La restriction de $\mathring{\varphi}$ à $x_1 = 0$ admet un point critique 0 non dégénéré. D'après le lemme de Morse (n° 6.2, p. 99), on peut choisir les coordonnées de façon à avoir la restriction $\pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_s^2$. La fonction $\mathring{\varphi}$ peut être considérée comme un déploiement de paramètre x_1 de cette fonction de Morse. Un déploiement R-versel de la fonction de Morse f est de la forme $f + \lambda$, où λ est une constante *). Par conséquent, le génotype est R-équivalent à la fonction $\pm x_2^2 \pm \ldots$ $\ldots \pm x_s^2 + \psi(x_1)$. Soit k l'ordre de ψ en 0. La fonction ψ est R-équivalente à $\pm x_1^k$, d'où la proposition du lemme.

En construisant la suspension de la forme normale obtenue du génotype, nous retrouvons les formules énoncées dans le théorème.

Remarque. Dans les trois théorèmes précédents les symboles de Boardman des germes obtenus sont de la forme (1, . . ., 1) pour les deux premiers et de la forme $(m - n + 1, 1, \ldots, 1)$ pour le troisième. Dans ces cas la condition de stabilité se confond avec la condition de transversalité à la strate de Boardman correspondante (voir par exemple les travaux de Morin [222]). Donc les germes transversaux à ces strates de Boardman sont stables. De la formule du produit des corangs (n° 2.1, p. 26) on voit que pour les applications génériques $(M^m, 0) \to (N^n, 0)$ de m, $n \leqslant 3$ on ne rencontre que des strates de Boardman du type indiqué. Par conséquent, les théorèmes démontrés ci-dessus établissent en particulier la classification de tous les germes d'applications génériques pour les dimensions inférieures à 4. Pour $m = n = 4$ on voit apparaître en outre des germes de corang 2 de symbole de Boardman (2, 0).

9.7. Germes stables d'applications d'espaces de dimension 4.

Théorème. *Un germe stable* $f\colon (\mathbf{R}^4, 0) \to (\mathbf{R}^4, 0)$ *est équivalent soit au germe de la fronce de Whitney généralisée (ou peut-être à son*

---

*) Cette proposition, dite « lemme de Morse paramétrique », se démontre sans peine de façon directe, sans faire intervenir le théorème de la versalité mais en reprenant la démonstration du lemme de Morse.

extension triviale), *soit à l'un des deux germes suivants*:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2 \pm x_2^2, \\ y_2 = x_1x_2 + \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2, \\ z_1 = \lambda_1, \\ z_2 = \lambda_2. \end{cases}$$

D é m o n s t r a t i o n. Le cas du corang 0 est trivial, et celui du corang 1 a été discuté au nº 9.6. Si le corang est égal à 2, le génotype est une application plan sur plan. Considérons la partie quadratique du génotype. C'est une paire de formes quadratiques sur un plan.

Lemme 1. *Dans les conditions du théorème la partie quadratique du génotype se laisse mettre par une V-équivalence sous la forme*

$$y_1 = x_1^2 \pm x_2^2, \quad y_2 = x_1x_2. \tag{1}$$

D é m o n s t r a t i o n. Transformons la famille linéaire générique des formes quadratiques sur le plan, par des changements linéaires de x et y, en

$$c_1(x_1^2 \pm x_2^2) + c_2x_1x_2.$$

Dans le cas des espaces de dimension 4, la variété des 1-jets de germes de corang 2 est de codimension 4. Aussi la variété des jets de germes de corang 2 dont la partie quadratique du génotype (i.e. la différentielle quadratique du germe) définit une famille linéaire non générique de formes est-elle de codimension supérieure à 4. Par conséquent, l'orbite d'un tel germe est de codimension supérieure à 4, si bien que le germe ne peut pas être stable (voir nº7.2) *).

Lemme 2. *Les deux germes du théorème sont RL-stables.*

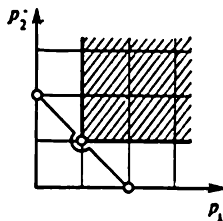


Fig. 46

D é m o n s t r a t i o n. Calculons tout d'abord la R-algèbre Q du génotype (1). On le fait sans peine à l'aide du diagramme de Newton (fig. 46). Sur ce diagramme un monôme $x_1^{p_1}x_2^{p_2}$ est représenté par un point (p_1, p_2). Considérons l'idéal engendré par les composantes du génotype. Il contient tous les monômes divisibles par x_1x_2. Les points représentatifs correspondants forment sur le diagramme

*) Il y a plus: d'après le théorème de la transversalité, une application générique de variétés de dimension 4 ne peut avoir aucun germe qui définisse une famille non générique de formes quadratiques.

un quadrant de sommet (1, 1) hachuré sur la figure. Au générateur $x_1^2 \pm x_2^2$ correspond le segment (2, 0)—(0, 2) du diagramme. Les extrémités de ce segment et de n'importe quel autre segment parallèle ayant ses sommets en des points entiers ($p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$) correspondent à des monômes qui sont proportionnels modulo l'idéal. En déplaçant le segment sur le diagramme de telle façon que l'une de ses extrémités tombe dans la zone hachurée, nous constatons que l'idéal contient tous les monômes de degré égal ou supérieur à 3.

En définitive, l'idéal $\{x_1^2 \pm x_2^2, x_1x_2\} = I$ dans A_x est de codimension 4 ; une **R**-base dans Q est formée par exemple par les classes des quatre monômes 1, x_1, x_2, x_1^2.

Considérons maintenant un sous-module $M = \left\{\frac{\partial \overset{\circ}{\varphi}}{\partial x_i}, \overset{\circ}{\varphi}_i e_j\right\}$ dans $(A_x)^2$. Pour définir une R-base dans $T = (A_x)^2 \Big/ \left\{\frac{\partial \overset{\circ}{\varphi}}{\partial x_i}, \overset{\circ}{\varphi}_i e_j\right\}$, il suffit d'indiquer une R-base dans $Q^2/\{p\, \partial\overset{\circ}{\varphi}/\partial x_i\}$, où p: $(A_x)^2 \to Q^2$ est une projection canonique. La base cherchée est formée par exemple par les projections des colonnes e_1, e_2, x_1e_2, x_2e_2.

En effet, considérons dans Q^2 la **R**-base formée par les projections de huit colonnes m_ie_j ($m_i = 1, x_1, x_2, x_1^2$). Les colonnes $\partial\overset{\circ}{\varphi}/\partial x_i$ sont $(2x_1, x_2)$ et $(\pm 2x_2, x_1)$. Exprimant $m_i\, e_j$ par des combinaisons fonctionnelles $\{\partial\overset{\circ}{\varphi}/\partial x_i\}$ et des combinaisons numériques e_1, e_2, x_1e_2, x_2e_2 (toutes sur Q), nous obtenons sans peine

$$x_1e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \frac{x_2e_2}{2}, \quad x_2e_1 = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \pm 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \mp \frac{x_1e_2}{2},$$

$$x_1^2e_1 \equiv \frac{x_1}{2}\begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \bmod I^2, \quad x_2^2e_2 \equiv x_1\begin{pmatrix} \pm 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \bmod I^2.$$

Il est évident que e_1, e_2, x_1e_2 et x_2e_2 sont indépendants dans T (cela ressort par exemple du fait que codim Σ^2 ($\mathbf{R}^4$, $\mathbf{R}^4$) = 4).

Ainsi donc, les germes du théorème sont des suspensions des génotypes (1) et, à ce titre, sont stables.

Lemme 3. *Le germe en* 0 *de toute application plan sur plan admettant la partie quadratique* (1) *est V-équivalent au germe de* (1) *en* 0.

D é m o n s t r a t i o n. En démontrant le lemme 2, nous avons vu que tous les monômes de degré 3 appartiennent à l'idéal engendré par $x_1^2 \pm x_2^2$, x_1x_2. Il s'ensuit que tout germe ψ de partie quadratique φ de la forme (1) admet une décomposition $\psi \equiv (E + A(x))\,\varphi$, où les éléments de la matrice A en 0 sont nuls.

Par conséquent, ψ et φ sont V-équivalents, ce qu'il fallait démontrer.

Le théorème découle des lemmes 1, 2, 3 et de la théorie générale (n° 9.5).

Remarque. Nous avons montré en même temps que toute application de variétés de dimension 4 se laisse approcher par des applications dont les germes en tout point sont stables.

En effet, la variété des jets de germes de corang 2 d'applications $M^4 \to N^4$ dont le génotype définit une famille non générique de formes quadratiques [ou pour lesquels les vitesses initiales des variations du génotype n'engendrent pas (avec e_1 et e_2) une base dans T] est de codimension supérieure à 4 (car la codimension de Σ^2 est déjà égale à 4 sans dégénérescences additionnelles).

Exemple. Considérons un germe d'application $(\mathbf{R}^4, 0) \to (\mathbf{R}^4, 0)$:

$$y_1 = x_1^2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad y_2 = x_1 x_2, \quad z_1 = \lambda_1, \quad z_2 = \lambda_2.$$

La singularité en 0 est de symbole de Boardman (2, 0), et l'extension à 1-jets est transversale à la strate de Boardman $\Sigma^{2,0}$ en 0. Ce germe est néanmoins instable. Cette différence du cas des singularités Σ^{1_k} tient à ce qu'on trouve dans la classe $\Sigma^{2,0}$ des orbites qui y sont de codimension positive.

9.8. Génotypes simples de $s \geqslant t$. On dit qu'un germe f: $(\mathbf{C}^s, 0) \to (\mathbf{C}^t, 0)$ est *V-simple*, ou est un *génotype simple*, si son k-jet (k quelconque) admet, dans le petit espace des jets $J^k_{0,0}(\mathbf{C}^s, \mathbf{C}^t)$, un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de classes de V-équivalence (borné par une constante indépendante de k). Autrement dit, les germes V-simples sont des génotypes dont les formes normales sont stablement exemptes de modules. *Les germes V-simples de $s \geqslant t$ se réduisent, à une V-équivalence et à des extensions triviales près, aux trois listes qui suivent* (cod est la codimension de la classe de V-équivalence dans le petit espace des jets et μ la multiplicité au sens du § 5).

1° *Génotypes simples du type* $\mathbf{C}^s \to \mathbf{C}^1$:

Nom	Forme normale	Restrictions	cod	μ (grad f)
A_μ	$x^{\mu+1}+Q$	$\mu \geqslant 1$	$\mu+s-1$	μ
D_μ	$x^2y+y^{\mu-1}+Q$	$\mu \geqslant 4$	$\mu+s-1$	μ
E_6	x^3+y^4+Q	néant	$5+s$	6
E_7	x^3+xy^3+Q	néant	$6+s$	7
E_8	x^3+y^5+Q	néant	$7+s$	8

Ici Q est la forme quadratique non dégénérée des variables non écrites (au nombre de $s-1$ pour A_μ et de $s-2$ pour les autres génotypes).

2° *Génotypes simples du type* $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$:

Nom	Forme normale	Restrictions	cod	$\mu(f)$
$I_{a,b}$	$xy,\ x^a+y^b$	$a \geqslant b \geqslant 2$	$a+b$	$a+b$
I_{2a+1}	$x^2+y^3,\ y^a$	$a \geqslant 3$	$2a+1$	$2a$
I_{2a+4}	$x^2+y^3,\ xy^a$	$a \geqslant 2$	$2a+4$	$2a+3$
$I^{\#}_{a+5}$	$x^2+y^a,\ xy^2$	$a \geqslant 4$	$a+5$	$a+4$
I^*_{10}	$x^3,\ y^4$	néant	10	8

3° *Génotypes simples du type* $\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^2$:

Nom	Forme normale		cod$=\mu+1$
S_μ	$x^2+y^2+z^{\mu-3}$,	yz	$\mu+1$
T_7	$x^2+y^3+z^3$,	yz	8
T_8	$x^2+y^3+z^4$,	yz	9
T_9	$x^2+y^3+z^6$,	yz	10
U_7	x^2+yz,	$xy+z^3$	8
U_8	x^2+yz,	$xy+xz^2$	9
U_9	x^2+yz,	$xy+z^4$	10
W_8	x^2+y^3,	y^2+xz	9
W_9	x^2+yz^2,	y^2+xz	10
Z_9	x^2+z^3,	y^2+z^3	10
Z_{10}	x^2+yz^2,	y^2+z^3	11

Ces notations ont été introduites par M. Giusti ([112-114, 266]). Les techniques de calcul conduisant à ces résultats (méthodes de rotation de la règle de Newton et de réduction des singularités semi-quasi homogènes aux formes normales) seront décrites dans le chap. II (on y traite de la R-équivalence, mais les méthodes mentionnées sont facilement applicables au cas de la V-équivalence).

Remarque. Les mêmes calculs montrent que tous les autres génotypes possédant une singularité isolée en 0 (pour les s et t énumérés) sont adjacents *) à la réunion des V-classes énumérées dans les trois listes qui suivent. On dit que ces classes *confinent les génotypes simples.* Dans les listes en question, cod est la codimension des classes (et non des orbites) dans le petit espace des jets, et m est le nombre de modules.

*) I.e. se laissent transformer en applications de V-classes indiquées par une déformation aussi petite que l'on veut.

1° *Génotypes confinants du type* $C^s \to C^1$:

Nom	Forme normale	Restrictions	cod	μ (grad f)	m
P_8	$x^3+y^3+z^3+axyz+Q$	$a^3+27 \neq 0$	$6+s$	8	1
X_9	$x^4+y^4+ax^2y^2+Q$	$a^2 \neq 4$	$7+s$	9	1
J_{10}	$x^3+y^6+ax^2y^2+Q$	$4a^3+27 \neq 0$	$8+s$	10	1

Ici Q est la forme quadratique non dégénérée de $s-3$ variables additionnelles pour P_8 et de $s-2$ variables additionnelles pour X_9 et J_{10}, et a, le paramètre (module).

2° *Génotypes confinants du type* $C^2 \to C^2$:

Nom	Forme normale	Restrictions	cod	μ (f)	m
I_{11}^{*}	$x^2+y^4,\ xy^3+ay^5$	néant	11	10	1
I_{10}^{**}	$x^2y,\ x^3+axy^2+y^3$	néant	10	9	1

3° *Génotypes confinants du type* $C^3 \to C^2$:

Nom	Forme normale	Restrictions	cod	m
T_9^{*}	$xy,\ x^4+y^4+z^2$	néant	10	1
T_{10}^{*}	$xy,\ x^3+y^6+z^2$	néant	11	1
U_{11}^{*}	$x^2+yz,\ xy+axz^3+z^5$	$4a^3 \neq 27$	11	1
W_{11}^{*}	$x^2+yz,\ y^2+ayz^2+z^4$	$a^2 \neq 4$	11	1
Z_{11}^{*}	$x^2+z^3,\ y^2+z^4$	néant	12	1
Z_{13}^{*}	$x^2+yz^2+az^4,\ y^2+xz^2+bz^4$	$\Delta \neq 0$	12	2
U_{10}^{**}	$xy+z^3,\ xz+y^2z+ayz^2$	$4a^3+27 \neq 0$	10	1
W_{13}^{**}	$xyz,\ x^2+y^2+z^2+axy+byz+czx$	$\delta \neq 0$	11	3

Les formes normales de T_9^{*}, T_{10}^{*}, Z_{11}^{*} sont dépourvues de modules, mais ces singularités sont adjacentes à $\{X_9\}$, $\{J_{10}\}$ et $\{W_{11}^{*}\}$ respectivement et sont donc non simples; $\Delta = 27 - 288ab - 256\,(a^3 + b^3 + a^2b^2)$, $\delta = (a^2-4)\,(b^2-4)\,(c^2-4)\,(a^2+b^2+c^2-2abc)$.

Adjacences fondamentales:

1° *Génotypes du type* $C^s \to C^1$. (Voir § 15.)

2° *Génotypes du type* $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
[A_2] & \leftarrow & I_{2,2} & \leftarrow & I_{2,3} & \leftarrow & I_{2,4} & \leftarrow & \dots & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & & & I_{3,3} & \leftarrow & I_{3,4} & \leftarrow & \dots & & \\
 & & & & \uparrow & & \vdots & \swarrow & I_9 \leftarrow I_{10} \leftarrow \dots & & \\
 & & & & I_7 & \leftarrow & I_8 & & \nwarrow I^*_{10} \leftarrow (I^*_{11}) & & \\
 & & & & & & \nwarrow & & \swarrow & & \\
 & & & & & (I^{**}_{10}) & \rightarrow & I^{\#}_9 & \leftarrow & I^{\#}_{10} & \leftarrow \dots
\end{array}
$$

3° *Génotypes du type* $\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^2$:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & S_5 & & & & (U^{**}_{10}) & & (U^*_{11}) \\
 & & & & \uparrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
\dots \rightarrow & S_7 & \rightarrow & & S_6 & \leftarrow & U_7 & \leftarrow & U_8 & \leftarrow & U_9 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
W_9 \leftarrow & (W^*_{11}) & & & T_7 & \leftarrow & W_8 & \leftarrow & Z_9 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
(X_9) \leftarrow & (T^*_9) & \rightarrow & & T_8 & & W_9 & \leftarrow & Z_{10} & \leftarrow & (Z^*_{13}) \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
(J_{10}) \leftarrow & (T^*_{10}) & \rightarrow & & T_9 & & (W^*_{11}) & \leftarrow & (Z^*_{11}) & &
\end{array}
$$

Sur ces diagrammes les classes confinantes sont mises entre parenthèses. Toutes les singularités confinantes sont quasi homogènes (voir chap. II). M. Giusti donne dans [113] une liste hypothétiquement complète des adjacences de génotypes simples, en omettant $W_8 \to D_6$ et d'autres. Les germes simples d'applications $\mathbf{C} \to \mathbf{C}^2$ et $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ ($\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$) sont décrits dans [69], [221] et aussi dans [84].

§ 10. Quelques autres résultats

Dans ce paragraphe nous décrivons certaines généralisations des théorèmes de stabilité et de versalité: nous considérons les diagrammes d'applications, les applications admettant un groupe de symétrie compact et la théorie topologique locale des singularités.

10.1. Diagrammes d'applications. Dans de nombreux ouvrages publiés ces dernières années les résultats de Mather concernant la stabilité des singularités des applications différentiables [207] sont étendus au cas de l'action de différents groupes de dimension infinie sur divers objets fonctionnels. La plupart des problèmes de cette nature se laissent décrire en langage des diagrammes d'applications (voir [52], [92]).

Soit D une famille finie $M_1, \ldots, M_n$ de variétés différentiables et d'applications $f_k: M_{s(k)} \to M_{i(k)}$ de ces variétés. Par $s(k)$ et $i(k)$ nous désignons les indices des variétés source et but de l'application f_k. La famille D (diagramme d'applications) sera représentée par un graphe aux sommets M_j reliés par des flèches répondant aux f_k.

On dit que deux diagrammes D_1, D_2 représentés par des graphes isomorphes sont *équivalents* s'il existe une famille de difféomorphismes $\Theta_j: M_j^{(1)} \to M_j^{(2)}$, $j = 1, \ldots, n$, telle que pour toute $f_k^{(1)}$

$$f_k^{(2)} = \Theta_{i(k)} \circ f_k^{(1)} \circ \Theta_{s(k)}^{-1}.$$

Munissons l'espace des diagrammes représentés par un graphe fixé d'une topologie convenable (topologie compacte ouverte ou topologie de Whitney).

Définition. On dit que le diagramme D est *stable* si tout diagramme proche D' est équivalent à D.

Remarque. On considère souvent le sous-ensemble des diagrammes représentés par un graphe fixé où les applications f_k ont une forme spéciale. Nous dirons que le diagramme D est *stable dans la classe des diagrammes de forme spéciale* si tout diagramme proche appartenant à cette classe se laisse réduire à D par une famille de difféomorphismes Θ conservant la structure des applications f_k.

Substituant aux variétés et applications leurs germes dans des points correspondants, nous obtiendrons les définitions locales de la stabilité. Nous considérons des diagrammes locaux indéfiniment différentiables, analytiques et formels.

Exemples. 1. Dans le cas du diagramme $M \xrightarrow{f} N$, nous obtenons la définition de la stabilité d'une application différentiable sous l'action du produit des groupes des difféomorphismes de M et N (voir Mather [270]).

2. Considérons le diagramme $\mathbf{R}^n \times M_1 \xrightarrow{\hat{F}} \mathbf{R}^n \times M_2 \xrightarrow{p} \mathbf{R}^n$, où p est la projection et $\hat{F}$ une application de forme spéciale:

$$\hat{F}(u, x) = (u, F(u, x)) \in \mathbf{R}^n \times M_2$$

pour tous $(u, x) \in \mathbf{R}^n \times M_1$. La stabilité d'un tel diagramme est équivalente à celle d'une famille différentiable $F(u, x)$ d'applications $x \mapsto F(\cdot, x)$ dépendant des paramètres $u \in \mathbf{R}^n$ (voir [121], [203], [324]).

3. Wassermann [325], [326], Dubois et Dufour [88], Arnold [23], Zakalyukin [340], Golubitsky et Schaeffer [122] étudient une forme particulière de stabilité: la (r, s)-stabilité des familles de fonctions

$F(u, v, x)$, elles-mêmes fonctions de deux groupes de paramètres $u \in \mathbf{R}^r$, $v \in \mathbf{R}^s$. Une telle stabilité est la stabilité des diagrammes de la forme

$$\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s \times M_1 \xrightarrow{\hat{F}} \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s \times \mathbf{R} \xrightarrow{p} \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s \xrightarrow{q} \mathbf{R}^s,$$

où p, q sont les projections canoniques, $\hat{F}(u, v, x) = (u, v, F(u, v, x))$, $F(u, v, x)$ est une fonction différentiable.

Les diagrammes de cette forme sont étroitement liés aux bifurcations subies par les caustiques d'applications lagrangiennes dans le temps. Dans ce cas la fonction F, considérée comme génératrice, engendre une variété lagrangienne dans l'espace fibré cotangent à l'espace des paramètres $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s$. Les valeurs critiques de la projection de cette variété sur $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s$ forment la « grande » caustique K (ensemble des u, v pour lesquels la fonction $F(u, v, \cdot)$ admet des points critiques dégénérés en x). Les surfaces de niveau $v =$ Cte partagent la grande caustique en petites et définissent la bifurcation des petites caustiques en cas de variation de v. Dans les problèmes appliqués la quantité v se présente comme le temps.

On est donc en présence de trois problèmes de classification:

1° La (r, s)-classification des familles de fonctions.

2° La classification des bifurcations des caustiques, i.e. des diagrammes de la forme

$$K \xrightarrow{i} \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s \xrightarrow{p} \mathbf{R}^s,$$

où K est une caustique d'application lagrangienne et $\xrightarrow{i}$ le plongement.

3° La classification des bifurcations des applications lagrangiennes, i.e. la classification des diagrammes de la forme

$$\Lambda \xrightarrow{i} T^*(\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s) \xrightarrow{\pi} \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^s,$$

où $\xrightarrow{i}$ est le plongement d'une variété lagrangienne et π la projection canonique ; au lieu de l'équivalence ordinaire des diagrammes on a alors une équivalence dans laquelle le difféomorphisme de l'espace fibré cotangent $T^*(\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s)$ est supposé symplectique.

Dans ces problèmes les équivalences sont telles que éq 3° $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ éq 1° $\Rightarrow$ éq 2°. En effet, si deux familles de fonctions sont (r, s)-équivalentes, les bifurcations des caustiques correspondantes sont équivalentes elles aussi. En outre, deux diagrammes quelconques équivalents au sens de la classification 3° ont les familles de fonctions génératrices qui sont (r, s)-équivalentes. Les classifications 1°-3° sont distinctes deux à deux.

Au sens de la classification 3°, un germe de bifurcation est stable si et seulement si l'application lagrangienne correspondante est stable pour $v = 0$. Les familles (r, s)-stables sont plus nombreuses,

leur classification est établie par Wassermann [327]. La fonction $F(u_1, u_2, v, x) = x^4 - (v - u_1^2)x^2 - u_2 x$ donne un exemple de famille non (r, s)-stable pour laquelle la bifurcation correspondante des caustiques est stable au sens de la classification 2° (on le montre en vérifiant les conditions infinitésimales correspondantes).

C'est la classification 2° qui revêt la plus grande utilité pratique.

4. Les diagrammes de la forme $M_2 \xleftarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_3$ apparaissent lors de l'étude des singularités des enveloppes d'une famille de sous-variétés (voir Arnold [23], Dufour [91]), ou lors de l'étude de la stabilité d'une application $f_1 \times f_2$ sous l'action du groupe des difféomorphismes de la source et du produit des groupes $\mathrm{Diff}(M_2) \times \times \mathrm{Diff}(M_3)$ sur le but $M_2 \times M_3$.

5. Les diagrammes $V_0 \xrightarrow{i} M_1 \xrightarrow{f} M_2$, où i est un plongement, caractérisent la classification des singularités d'applications différentiables d'après le groupe des difféomorphismes qui laissent la sous-variété V_0 invariante. Les singularités simples des diagrammes de la forme $(\mathbf{R}^{n-1}, 0) \hookrightarrow (\mathbf{R}^n, 0) \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ (i.e. des fonctions sur une variété à bord) ont été étudiées par Arnold dans [20].

6. La stabilité des cascades, i.e. des diagrammes de la forme

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n,$$

fait l'objet des travaux de Baas [52] et de Büchner [73].

7. Considérons $M \xrightarrow{f} M$, où f subit l'action par conjugaison d'un groupe de difféomorphismes $\mathrm{Diff}(M)$: $g(f) = gfg^{-1}$. L'étude des singularités de cette action est le problème classique de Poincaré-Siegel. Cette action a été étudiée par la méthode des petits dénominateurs dans les travaux de Kolmogorov, Arnold et Bruno (voir aussi les travaux de Belitskiï [55], [56], et de Gomozov [123], [124]).

Chaque exemple vise à décrire des diagrammes stables ou des diagrammes génériques pour des variétés de petite dimension.

Soit θV un espace de champs de vecteurs sur la variété V, espace qui est un module de type fini sur l'anneau $C^\infty(V)$ des fonctions différentiables sur V. Considérons une application $f: V \to W$ et désignons par θf l'espace des champs de vecteurs verticaux sur le graphe de f. L'espace θf est un $C^\infty(V)$-module de type fini. Soit $\mathrm{tf}: \theta V \to \theta f$ un homomorphisme tel que $\mathrm{tf}(\xi) = df(\xi)$, et soit $\omega f: \theta W \to \theta f$ une application $\omega f(\eta) = \eta \circ f$ qui est un homomorphisme sur $f^* C^\infty(W)$. Pour les diagrammes D, posons $\theta D = \Pi \theta f_k$ et $\Lambda D = \Pi \theta M_j$. Désignons par αD une application $\alpha D: \Lambda D \to \theta D$:

$$\alpha D(\xi_1, \dots, \xi_n) \to \prod_k (\mathrm{tf}_k(\xi_{s(k)}) + \omega f_k(\xi_{t(k)})),$$

où $\xi_{s(k)}$ est un champ sur la source de f_k et $\xi_{l(k)}$ un champ sur le but de f_k.

Définition. On dit que le diagramme D est *infinitésimalement stable*, ou *inf-stable*, si l'application αD est surjective.

Théorème ST (voir [90], [92]). *Si le diagramme D ne contient aucun sous-diagramme (divergent) de la forme $M_1 \leftarrow M_2 \rightarrow M_3$ ni cycle, D est stable s'il est inf-stable.*

Remarques. 1. Un théorème analogue est vrai pour beaucoup de diagrammes de forme spéciale, tels que les diagrammes des exemples 2 et 3 (quitte à considérer des champs de vecteurs d'un type approprié dans la définition de la stabilité infinitésimale).

2. Remarquons qu'un diagramme contenant des cycles orientés n'est jamais stable (voir [92]).

3. La démonstration du théorème ST s'appuie sur un corollaire algébrique du théorème de préparation de Weierstrass-Malgrange. Voici ce corollaire. Considérons le diagramme dual D' dont les sommets sont des espaces de fonctions sur M_k et les flèches, les applications f_k^*, duales des f_k. Dufour introduit dans [90], [92] les notions de contraction adéquate de l'homomorphisme f_k^* et de contraction adéquate de l'homomorphisme construit d'après la totalité de D'. Il se trouve que si tous les f_k^* admettent une contraction adéquate, l'homomorphisme construit pour un diagramme sans cycles ni sous-diagrammes divergents admet lui aussi une contraction adéquate. Il y a des contre-exemples de diagrammes divergents pour lesquels cette assertion cesse d'être vraie pour des anneaux de fonctions analytiques. Dans le cas des applications de classe C^∞, le théorème ST n'est pas démontré pour les diagrammes contenant des sous-diagrammes divergents ; or, aucun contre-exemple n'a été exhibé.

Considérons un diagramme local

$$D_0\colon (\mathbf{R}^2, 0) \xleftarrow{f_1} (\mathbf{R}^2_1, 0) \xrightarrow{f_2} (\mathbf{R}, 0)$$

qui s'écrit en coordonnées $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sous la forme

$$(x, y^2) \leftarrow (x, y) \mapsto (x + xy + y^2).$$

On montre sans peine que D_0 est infinitésimalement stable. Il est constaté dans [91] que D_0 est stable dans la classe C^∞ des difféomorphismes et applications. Or, D_0 n'est pas stable dans la classe des applications analytiques. On rencontre une différence analogue entre le cas différentiable (formel) et le cas analytique dans les problèmes sur les formes normales des singularités de fonctions relativement au groupe des difféomorphismes du but.

La thèse de Dufour contient une étude détaillée des diagrammes divergents (voir aussi [88], [90]-[92]). Citons quelques résultats dégagés par Dufour.

Théorème. *Le diagramme* $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ *est stable si et seulement s'il est équivalent en chacun de ses points à l'un des diagrammes suivants :*

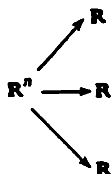
$$x_1 \leftarrow\!\shortmid (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_2,$$

$$x_1 \leftarrow\!\shortmid (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \sum_{i=2}^{n} (\pm x_i^2),$$

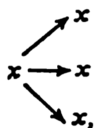
$$x_1 \leftarrow\!\shortmid (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} (\pm x_i^2).$$

$$x_2 \leftarrow\!\shortmid (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^3 + x_1x_2 + x_2 + \sum_{i=3}^{n} (\pm x_i^2).$$

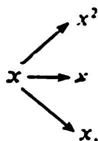
Théorème. *Un diagramme localement stable de la forme*



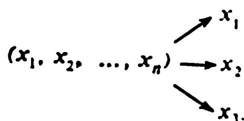
est pour $n = 1$ *équivalent soit à*



soit à



et pour $n > 2$ *à*



En étudiant le problème de la stabilité, on est conduit à envisager une question plus fine de la détermination finie des diagrammes, i.e. de la stabilité dans la classe des diagrammes ayant un jet fixé d'un ordre déterminé. Les travaux [19], [56], [55], [124], [198], [175], [252] généralisent le critère de la détermination finie de Mather. Dans [56], [123] sont considérées les conditions de stabilité et de détermination finie pour les difféomorphismes et les applications d'une classe de différentiabilité finie.

On trouve dans [55] et [124] les conditions de stabilité infinitésimale des diagrammes de l'exemple 7 et des familles de diagrammes de ce type pour les applications $f\colon (M, 0) \to (M, 0)$ dont le spectre de la partie linéaire est situé d'un seul côté du cercle unité. Remarquons qu'un germe d'une telle application n'est jamais inf-stable si sa partie linéaire est dégénérée.

10.2. Théorie équivariante. En étudiant les singularités des applications qui possèdent une symétrie, on envisage la construction suivante.

Soit G un groupe de Lie compact opérant sur les variétés M_1, M_2 ; considérons l'action du groupe des difféomorphismes G-invariants de M_1 et M_2 sur des applications G-équivariantes $f\colon M_1 \to M_2$. On montre dans [243] et [244] que la versalité infinitésimale des familles d'applications de ce type indique leur versalité. Les conditions de versalité infinitésimale d'une famille d'applications peuvent être interprétées comme transversalité d'une application à une sous-variété G-invariante stratifiée dans l'espace des jets des applications $f\colon M_1 \to M_2$. La définition de la transversalité d'une application G-invariante à une sous-variété G-invariante stratifiée est donnée dans [100], [332], où l'on démontre des théorèmes affirmant que les applications G-transversales forment un ensemble ouvert et partout dense dans l'espace de toutes les G-applications.

Il en est tout autrement pour le cas de symétries brisées: les résultats de l'étude formelle ne s'appliquent pas aux séries convergentes. Cette difficulté surgit déjà dans le problème de réduction à la forme normale d'une fonction d'une variable complexe avec un point critique 0 non dégénéré par des changements pairs de variables dans les cas de symétrie brisée, i.e. quand la fonction à réduire n'est pas paire.

10.3. Revue générale des résultats sur la théorie topologique des singularités.

1° Densité des applications topologiquement stables. La relation d'équivalence topologique a été introduite par R. Thom qui pensait que cette équivalence n'admet pas de modules continus dans le cas général, ce qui est résumé par un théorème selon lequel les

applications topologiquement stables forment un ensemble partout dense dans l'espace de toutes les applications différentiables. (Pour les applications différentiablement stables un tel théorème n'est pas vrai en général, voir n° 3.7.) L'espoir s'est justifié: J. Mather a démontré, en se basant sur les conjectures de Thom, le théorème suivant (voir [207], [208]):

Soient M, N deux variétés différentiables, et soit M compacte; alors les applications topologiquement stables de M dans N forment un ensemble partout dense dans l'espace de toutes les applications différentiables de M dans N muni de la topologie de Whitney.

Pour la démonstration complète de ce théorème, nous renvoyons à [111].

2° **Stratifications et applications.** La démonstration du théorème formulé s'appuie sur la théorie des ensembles stratifiés et des applications stratifiées développée par Thom, en particulier sur les lemmes d'isotopie de Thom. Cette théorie est à l'heure actuelle l'outil technique principal de la théorie topologique des singularités. Voici, à titre d'exemple, une assertion tirée de cette théorie:

Définition. On appelle *stratification de Whitney* d'une partie W de la variété M une partition localement finie $\mathcal{S}$ de W en parties différentiables disjointes de M vérifiant les conditions suivantes:

1) (axiome des frontières). Si U et V sont des strates de $\mathcal{S}$ et si $\overline{U} \cap V \neq \varnothing$, alors $V \subset \overline{U}$.

2) (condition de Whitney b) (voir [207]). Si U et V sont des strates de $\mathcal{S}$ et $x \in V$, alors V doit être régulièrement adjacente en x à U.

Pour définir la relation d'adjacence régulière, supposons d'abord que M soit un sous-ensemble ouvert dans $\mathbf{R}^n$. Il existe alors pour deux points distincts quelconques $x, y \in \mathbf{R}^n$ une sécante $\overline{xy}$: c'est un sous-espace de dimension 1 dans $\mathbf{R}^n$ engendré par le vecteur $x - y$. L'espace tangent TM_x est naturellement identifié avec $\mathbf{R}^n$ pour tout point $x \in M$.

Condition d'adjacence régulière de V à U en x. Si $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ sont des suites de points de V et de U respectivement, telles que $x_i \to x$ et $y_i \to x$ $(x_i \neq y_i)$, que la suite $\overline{x_i y_i}$ est convergente (dans l'espace projectif $\mathbf{RP}^{n-1}$) et la suite TU_{y_i} est convergente (dans la variété grassmannienne des (dim U)-plans de $\mathbf{R}^n$), alors $l \subset \tau$, où $l = \lim \overline{x_i y_i}$, $\tau = \lim TU_{y_i}$.

Il est facile de voir que si φ est un difféomorphisme de l'ensemble ouvert M sur un autre sous-ensemble ouvert de R^n, alors le triplet $(\varphi U, \varphi V, \varphi x)$ vérifie la condition d'adjacence régulière si le triplet (U, V, x) vérifie cette condition. Par conséquent, la condition d'adjacence régulière est bien définie pour le triplet (U, V, x), où U et V sont deux sous-variétés de la variété M et x un point de V.

Premier lemme d'isotopie de Thom (voir [207]). *Soient M, N deux variétés, $f: M \to N$ une application différentiable, W une sous-variété fermée dans M munie d'une stratification de Whitney $\mathcal{S}$. Supposons que l'application $f \mid W: W \to N$ soit propre et que pour toute strate U de $\mathcal{S}$ l'application $f \mid U: U \to N$ soit une submersion. Alors $f \mid W: W \to N$ est une fibration topologique localement triviale.*

3° Classification topologique des germes d'applications différentiables. Encore en 1962 R. Thom a donné un exemple de famille d'applications polynomiales $f_s: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dépendant d'un paramètre $s \in \mathbf{R}$ et topologiquement non équivalentes deux à deux. Or, ce cas est extrêmement rare. Voici l'assertion qui l'exprime.

Soit $J(n, p)$ l'espace de tous les germes d'applications différentiables de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, et soit $J^r(n, p)$ l'espace de leurs r-jets. Les espaces J^r sont naturellement rapportés à des coordonnées (valeurs des dérivées des fonctions coordonnées).

Théorème (voir [287]). *Soient n, p deux entiers naturels. Il existe alors pour tout entier naturel r une partition de $J^r(n, p)$ en sous-ensembles semi-algébriques disjoints V_0, V_1, V_2, ... tels que:*

1) *si $f_1, f_2 \in J(n, p)$ sont tels que $f_1^{(r)}, f_2^{(r)} \in V_i$, $i > 0$, alors les germes f_1, f_2 sont topologiquement équivalents;*

2) *un germe quelconque $f \in J(n, p)$ tel que $f^{(r)} \in V_i$, $i > 0$, est une application simpliciale pour certaines triangulations de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$;*

3) *la codimension de V_0 dans $J^r(n, p)$ tend vers l'infini quand r tend vers l'infini.*

La relation d'équivalence topologique présente encore une qualité remarquable. *Il est possible de choisir les partitions du théorème de telle façon qu'outre les propriétés* 1)-3) *soient vérifiées les propriétés* 4), 5) *qui suivent* (cf. [285]):

4) *un germe quelconque $f \in J(n, p)$ tel que $f^{(r)} \in V_i$, $i > 0$, admet un déploiement topologiquement versel de dimension finie;*

5) *si $f_1, f_2 \in J(n, p)$ sont tels que $f_1^{(r)}, f_2^{(r)} \in V_i$, $i > 0$, alors f_1 et f_2 admettent des déploiements topologiquement versels qui sont topologiquement équivalents.*

(La notion de déploiement topologiquement versel est parallèle à celle de déploiement différentiablement versel.) Notons qu'il existe des n, p tels que les germes n'admettant pas de déploiement différentiablement versel de dimension finie forment un ensemble de codimension finie dans $J(n, p)$.

4° Conditions d'équivalence topologique. Le résultat le plus connu résumant les conditions suffisantes d'équivalence topologique est le

Théorème (voir [186], [276]). *Soit $f_s: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ une famille de germes d'applications holomorphes dépendant différentiable-*

ment d'un paramètre $s \in \mathbf{R}^p$. *Supposons que pour tout* s *le nombre de Milnor* μ_s *d'un germe* f_s *soit fini et indépendant de* s. *Supposons en outre que* $n \neq 3$. *Alors tous les germes* f_s *sont topologiquement équivalents.*

La condition $n \neq 3$ résulte du théorème du h-cobordisme qui a été utilisé pour la démonstration *).

D'autres invariants topologiques ont été envisagés par M. Fukuda, T. Fukuda et J. Damon. Voici le théorème établi par M. Fukuda et T. Fukuda. Soit $f = (f_1, \ldots, f_p)\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ un germe d'application différentiable: désignons par $Q(f) = C^\infty(\mathbf{R}^n)/(f_1, \ldots, f_p)$ la $\mathbf{R}$-algèbre associée à f (voir n° 4.2).

Théorème. *Si les* $\mathbf{R}$*-algèbres associées* $Q(f)$ *et* $Q(g)$ *des germes topologiquement stables* $f\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$, $g\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ *sont isomorphes, alors les germes* f, g *sont topologiquement équivalents.*

Remarquons qu'on trouve des germes f, g différentiablement stables qui sont topologiquement équivalents sans être différentiablement équivalents (i.e. $Q(f) \neq Q(g)$).

Voici le théorème de J. Damon. Soit h la fonction de Hilbert-Samuel de la $\mathbf{R}$-algèbre $Q(f)$ définie par

$$h(k) = \dim_{\mathbf{R}} Q(f)/\mathfrak{m}^{k+1},$$

où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de la $\mathbf{R}$-algèbre $Q(f)$. On dit que le germe f est V-simple si parmi les petites déformations de f il n'y a qu'un nombre fini de types de V-équivalence.

Théorème. 1. *Les germes* C^∞*-stables* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ $(n \leqslant p)$ *admettent pour invariants topologiques* a) *le type* Σ^i *de Thom-Boardman et* b) *(pour* $p \geqslant n + C_i^2$*) le type* $\Sigma^{i,j}$ *de Thom-Boardman.*

2\. *Les germes V-simples* C^∞*-stables* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ $(n \leqslant p)$ *admettent pour invariant topologique la fonction de Hilbert-Samuel de la* $\mathbf{R}$*-algèbre* $Q(f)$.

J. Damon affirme qu'un invariant topologique est constitué en certains cas par le type complexe de la $\mathbf{R}$-algèbre $Q(f)$.

5° **Autres questions.** La théorie topologique des singularités couvre aussi des *questions globales*, telles que le lien entre la théorie des singularités et les classes caractéristiques dont l'étude est entreprise dans les travaux classiques de Whitney et de Pontriaguine. Nous ne nous arrêtons pas à ces questions fort intéressantes et prometteuses (surtout pour les applications lagrangiennes et legendrien-

*) Le cas $n = 3$ est traité dans B. Perron, « μ *constant* » *implique* « *type topologique constant* » *en dimension complexe trois*. Comptes rendus Ac. sci. 1982, t. 295, p. 735-738; B. Perron, *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type in the dimension three.* Singularities in dynamical systems. Proc. Int. Conf. Heraclion, 30 aug.-30 sept. 1983. Amsterdam, 1985, p. 239-248.

nes) vu que le présent livre est consacré à la théorie *locale* des singularités.

Un résultat particulier qui va suivre est pour ainsi dire semilocal. Considérons sur une variété fermée une famille de fonctions différentiables f qui dépendent d'un paramètre y de dimension n, et écrivons la fonction du maximum $F(y) = \max_x f(x, y)$. L. Bryzgalova a montré [71], [72] que *pour des familles génériques de* $n \leqslant 6$ F *est topologiquement équivalente à une fonction de Morse.* V. Matov a démontré la même proposition pour n quelconque. Il a montré aussi que, pour f génériques, la fonction $\min_y \max_x f(x, y, z)$ est topologiquement équivalente à une fonction de Morse (cf. [213], [214]).

CHAPITRE II

POINTS CRITIQUES DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

Les fonctions génériques ne présentent que des points critiques non dégénérés. Mais, quand on passe à l'étude des familles de fonctions, on voit apparaître des points critiques dégénérés élémentaires qu'une petite déformation de la famille n'arrive pas à supprimer. Par exemple, la famille $f(x, t) = x^3 - tx$ admet, pour la valeur nulle du paramètre t, un point critique dégénéré qui subsiste dans toute famille proche quand le paramètre a une valeur proche de 0. De plus complexes singularités apparaissent avec l'augmentation du nombre de paramètres.

Toute tentative de classifier ces points dégénérés semble de prime abord désespérée. Or, dès qu'on a établi un premier morceau de la classification, on a vu que son organisation est suffisamment simple : il s'est avéré que la classification des points dégénérés élémentaires est liée à celle des groupes de Lie simples, à la théorie des groupes engendrés par les réflexions, à la théorie des tresses et à la classification des polyèdres réguliers dans l'espace tridimensionnel usuel.

Dans ce chapitre, nous décrivons la première étape de classification des points critiques des fonctions, y compris la classification des singularités simples (ou 0-modales), unimodales et bimodales, et celle de toutes les singularités de multiplicité $\mu \leqslant 16$.

Le nombre ν de classes (de μ-équivalence stable que nous définirons plus loin) des singularités complexes de multiplicité $\mu \leqslant 16$ est donné dans le tableau suivant :

μ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ν	1	1	1	2	2	3	3	4	4	7	11	15	14	17	22	32

L'ensemble des singularités non classifiées est de codimension 11, si bien que la classification proposée couvre tous les points critiques

que peuvent présenter les familles de fonctions génériques dépendant de 10 paramètres au plus.

La classification des singularités simples est discrète, mais les singularités fortement dégénérées possèdent des modules.

On appelle *modalité m* d'un point $x \in X$ par l'action d'un groupe de Lie G sur la variété X, le plus petit nombre tel qu'un voisinage suffisamment petit de x puisse être recouvert par un nombre fini de familles m-paramétriques d'orbites. On dit que le point x est *simple* s'il est de modalité 0, i.e. si son voisinage ne rencontre qu'un nombre fini d'orbites.

La *modalité d'un germe de fonction* en un point critique de valeur critique 0 est la modalité du jet suffisant dans l'espace des jets de fonctions de point critique 0 et de valeur critique 0.

On dit que deux germes sont *stablement équivalents* s'ils deviennent R-équivalents *) par l'adjonction de formes quadratiques non dégénérées d'un nombre adéquat de variables.

Théorème 1 (voir [11], [12]). *Les germes simples de fonctions holomorphes* ($m = 0$) *sont à l'équivalence stable près exactement les suivants*:

$$\begin{aligned} A_k &: f(x) = x^{k+1}, && k \geqslant 1; \\ D_k &: f(x, y) = x^2y + y^{k-1}, && k \geqslant 4; \\ E_6 &: f(x, y) = x^3 + y^4; \\ E_7 &: f(x, y) = x^3 + xy^3; \\ E_8 &: f(x, y) = x^3 + y^5. \end{aligned}$$

Le lien de ces singularités avec les algèbres de Lie simples désignées par les mêmes symboles ou les groupes engendrés par les réflexions est étudié dans [13]. On peut aussi obtenir ces singularités à partir de polyèdres réguliers dans l'espace euclidien tridimensionnel, plus exactement à partir des sous-groupes discrets du groupe $SU(2)$: ils définissent les relations entre les invariants de base du groupe. Les A_k correspondent aux polygones, les D_k aux dièdres, E_6 au tétraèdre, E_7 à l'octaèdre et E_8 à l'icosaèdre. Pour plus de détails, voir [16].

Théorème 2 (voir [14]). *Les germes unimodaux* (*germes de* $m = 1$) *se réduisent exactement, à l'équivalence stable près, à une série à indice triple de familles* 1*-paramétriques*:

$$T_{p,q,r}: f(x, y, z) = axyz + x^p + y^q + z^r,$$
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1, \quad a \neq 0;$$

*) On dit que deux fonctions sont *R-équivalentes* si l'on peut passer de l'une à l'autre par un certain changement (difféomorphe) des variables indépendantes.

à trois familles 1-paramétriques de germes paraboliques

$$P_8 = T_{3,3,3}: f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + axyz, \qquad a^3 + 27 \neq 0,$$
$$X_9 = T_{2,4,4}: f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^2 + ax^2y^2, \qquad a^2 \neq 4,$$
$$J_{10} = T_{2,3,6}: f(x, y, z) = x^3 + y^6 + z^2 + ax^2y^2, \qquad 4a^3 + 27 \neq 0,$$

et à 14 familles 1-paramétriques exceptionnelles énumérées dans le tableau qui suit (la signification des colonnes du tableau sera explicitée plus loin) :

Nom	Forme normale	Exposants d'homogénéité	Nombre de Coxeter	Nombres de Dolgatchev	Nombres de Gabriélov	Classe duale
Q_{10}	$x^2z+y^3+z^4+ayz^3$	8 9 6	−24	2 3 9	3 3 4	E_{14}
Q_{11}	$x^2z+y^3+yz^3+az^5$	7 6 4	−18	2 4 7	3 3 5	Z_{13}
Q_{12}	$x^2z+y^3+z^5+ayz^4$	6 5 3	−15	3 3 6	3 3 6	Q_{12}
S_{11}	$x^2z+yz^2+y^4+ay^3z$	6 5 4	−16	2 5 6	3 4 4	W_{13}
S_{12}	$x^2z+yz^2+xy^3+ay^5$	5 4 3	−13	3 4 5	3 4 5	S_{12}
U_{12}	$x^3+y^3+z^4+axyz^2$	4 4 3	−12	4 4 4	4 4 4	U_{12}
Z_{11}	$x^3y+y^5+z^2+axy^4$	15 8 6	−30	2 3 8	2 4 5	E_{13}
Z_{12}	$x^3y+xy^4+z^2+ay^6$	11 6 4	−22	2 4 6	2 4 6	Z_{12}
Z_{13}	$x^3y+y^6+z^2+axy^5$	9 5 3	−18	3 3 5	2 4 7	Q_{11}
W_{12}	$x^4+y^5+z^2+ax^2y^3$	10 5 4	−20	2 5 5	2 5 5	W_{12}
W_{13}	$x^4+xy^4+z^2+ay^6$	8 4 3	−16	3 4 4	2 5 6	S_{11}
E_{12}	$x^3+y^7+z^2+axy^5$	21 14 6	−42	2 3 7	2 3 7	E_{12}
E_{13}	$x^3+xy^5+z^2+ay^8$	15 10 4	−30	2 4 5	2 3 8	Z_{11}
E_{14}	$x^3+y^8+z^2+axy^6$	12 8 3	−24	3 3 4	2 3 9	Q_{10}

Ces 14 singularités peuvent être obtenues à partir de 14 triangles sur le plan de Lobatchevski, ou plus exactement, à partir des sous-groupes discrets qu'ils définissent dans le groupe $SU(1, 1)$. Pour $a = 0$, la forme normale définit l'unique relation entre invariants de l'algèbre des formes automorphes entières. Cette algèbre a trois générateurs pour exactement 14 triangles ; leurs angles sont égaux à π/(nombres de Dolgatchev).

I. Dolgatchev, qui a proposé cette construction, et H. Pinkham ont indiqué aussi un procédé permettant d'obtenir les 14 singularités exceptionnelles à partir des surfaces dites $K-3$ (voir [87], [237]).

Théorème 3 (voir [12], [14]). *Dans l'espace des germes de fonctions de valeur critique* 0, *les germes non simples de fonctions de* $n \geqslant 3$ *variables forment un ensemble de codimension* 6 *et les germes de modalité supérieure à* 1, *un ensemble de codimension* 10.

Toute famille s-paramétrique de fonctions, où $s < 6$ ($s < 10$), peut donc être rendue générique par une déformation aussi petite que l'on veut, de telle façon que les germes des fonctions de la famille, en chacun des points critiques, soient stablement équivalents (à des constantes additives près) aux germes du théorème 1 (des théorèmes 1 et 2).

§ 11. Principe de classification des points critiques

Ce paragraphe décrit les principales étapes de classification des points critiques des fonctions holomorphes : quant aux résultats de la classification et aux calculs qui s'imposent à différentes étapes, ils seront donnés dans les paragraphes suivants. Toutes les fonctions considérées sont holomorphes et possèdent un point critique 0 de valeur critique 0. L'équivalence est interprétée au sens de la R-équivalence (on dit que deux germes de fonctions sont équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre par un changement biholomorphe de variables indépendantes).

11.1. Classification suivant le corang de la différentielle seconde.

Définition. On appelle *corang d'une fonction au point critique*, le corang de sa différentielle seconde.

Théorème. *Au voisinage d'un point critique de corang k, toute fonction holomorphe de n variables est équivalente à une fonction*

$$f(x_1, \ldots, x_k) + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2,$$

où la différentielle seconde de f en 0 s'annule ; $f \in \mathfrak{m}^3$.

D é m o n s t r a t i o n. C'est une conséquence du lemme de Morse paramétrique, voir n° 6.2, p. 99, et n° 9.6, p. 136.

Définition. On dit que deux fonctions (d'un nombre différent de variables) sont *stablement équivalentes* si on peut les rendre équivalentes par l'adjonction des formes quadratiques non dégénérées de variables auxiliaires ; l'équivalence stable de f et g s'entend au sens de l'équivalence habituelle

$$f(x_1, \ldots, x_k) + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2 \sim$$
$$\sim g(y_1, \ldots, y_l) + y_{l+1}^2 + \ldots + y_n^2.$$

Remarque. On montre que deux fonctions d'un même nombre de variables sont stablement équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes (voir [331]). Ainsi, le passage à l'équivalence stable permet, sans modifier la classification des points critiques de fonctions d'un nombre donné de variables, de comparer la dégénérescence des points critiques de fonctions d'un nombre différent de variables.

Théorème. *Au voisinage d'un point critique de multiplicité finie de corang* 1, *toute fonction est stablement équivalente à une fonction* x^m.

D é m o n s t r a t i o n. Voir n° 9.6, p. 135.

La multiplicité du point critique de x^m peut être facilement calculée: $\mu = m - 1$.

Définition. Un point critique de corang 1 de multiplicité μ est appelé *singularité de type* A_μ. En un point de type A_μ, toute fonction est stablement équivalente à $x^{\mu+1}$ en 0.

Théorème. *Les fonctions de n variables à point critique* 0 *de corang* $k \leqslant n$ *forment un ensemble de codimension* $k(k+1)/2$ *dans l'espace des germes de fonctions dont la valeur critique en* 0 *est* 0.

D é m o n s t r a t i o n. Voir n° 2.2, p. 27.

En particulier, l'ensemble de telles fonctions est de codimension 3 pour le corang 2, de codimension 6 pour le corang 3 et de codimension 10 pour le corang 4. Par conséquent, dans les familles génériques 1- et 2-paramétriques de fonctions, on ne rencontre que des singularités de corang 1 ; si le nombre de paramètres est inférieur à 6, le corang des singularités ne dépasse pas 2 ; si le nombre de paramètres est inférieur à 10, le corang ne dépasse pas 3. Ainsi, en établissant la classification des singularités de fonctions appartenant à des familles génériques, on peut se limiter aux fonctions de deux variables si la famille a moins de 6 paramètres, et aux fonctions de trois variables si la famille a moins de 10 paramètres.

11.2. Singularités élémentaires de corang 2. La classification des fonctions de deux variables de 2-jet nul ($f \in \mathfrak{m}^3$) commence par celle des termes de degré 3 de la série de Taylor. On démontre sans peine le

Théorème. *Une forme cubique de deux variables peut être ramenée, par une transformation* **C**-*linéaire, à l'une des formes suivantes*:

1) $x^2y + y^3$,
2) x^2y,
3) x^3,
4) 0

(*dans le cas réel*: $x^2y \pm y^3, \ldots$).

Il faut ensuite considérer chaque cas séparément.

Théorème. *Une fonction de forme cubique initiale* $x^2y \pm y^3$ *est équivalente à sa forme initiale.*

La démonstration de ce théorème simple sera donnée plus loin, au n° 12.6 où une méthode générale est proposée.

Plaçons-nous dans le cas 2). Considérons le diagramme de Newton (fig. 47) qui, à une série $f = \sum a_{p,q}x^py^q$, fait correspondre un *support* supp f constitué de points entiers (p, q) du plan $\mathbf{R}^2$, qui

sont les exposants des monômes de la série à coefficients non nuls:

$$\operatorname{supp} f = \{(p, q) \in \mathbf{R}^2 : a_{p,q} \neq 0\}.$$

La *méthode de rotation de la règle de Newton* (voir [226]) consiste à tracer, par le point exposant d'un monôme marqué du support, une droite (la « règle ») séparant le point 0 des points non marqués du support, et à faire tourner cette dernière autour de l'exposant marqué jusqu'à ce qu'elle rencontre l'exposant d'un autre monôme présent dans la série (les points du support peuvent être assimilés à des clous plantés dans une planche).

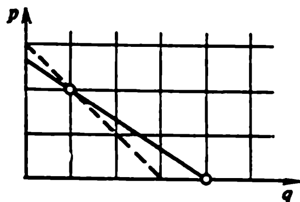


Fig. 47

Dans le cas considéré 2) on n'a qu'un seul monôme x^2y de degré $\leqslant 3$. Marquons ce monôme et posons la règle suivant le pointillé. En tournant la règle, nous rencontrerons, tour à tour, les points entiers qui correspondent aux monômes y^4, xy^3 et y^5, y^6, xy^4 et y^7, . . .

Cas 2a. La règle rencontre un point unique $(q, 0)$ de l'axe des q. On montre alors que tous les autres points du support ne changent pas la classe d'équivalence de la fonction: celle-ci se réduit à la forme normale $x^2y + y^k$ (voir n° 12.6).

Cas 2b. La règle rencontre deux points qui correspondent aux monômes xy^{k+1} et y^{2k+1}. Considérons le polynôme défini par ces points:

$$Ax^2y + Bxy^{k+1} + Cy^{2k+1}, \quad A \neq 0.$$

Ce polynôme sera appelé *partie principale* de la fonction envisagée. Considérons le plan muni de coordonnées (x, z), où $z = y^k$. Les zéros de la partie principale définissent sur ce plan trois droites d'équations

$$z = 0, \quad x = \lambda_1 z, \quad x = \lambda_2 z.$$

Les changements $x = x' + \lambda y$ définissent des difféomorphismes du plan (x, y). Ceux-ci transforment la partie principale indépendamment du reste de la série de f (les monômes dont les exposants se situent strictement au-dessus de la règle n'affectent, après transformation, que les valeurs des monômes dont les exposants se situent strictement au-dessus de la règle; des détails seront donnés au n° 12.6).

Quitte à choisir convenablement λ, on peut toujours annuler le coefficient B. Le cas 2b s'en trouve réduit au cas 2a. La multiplicité du point critique de la fonction $x^2y + y^k$ se calcule facilement: $\mu = k + 1$.

Définition. Un point critique équivalent à celui de la fonction $x^2y + y^{\mu-1}$ s'appelle *point critique de type D_μ*.

Tous les points de corang 2 (de multiplicité finie) à 3-jet $x^2y + y^3$ ou x^2y sont d'un des types D_μ.

Les fonctions présentant des singularités plus compliquées forment un ensemble de codimension 5. Dans les familles à quatre paramètres au plus, on ne rencontre donc que des singularités A_μ ($\mu \leqslant 5$), D_4 et D_5 *).

Il est clair qu'à l'étape suivante de la classification (étude du cas 3)) on tournera la règle autour de l'exposant du monôme x^3; puis l'étude du cas 4) commencera, elle, par la classification des 4-formes de deux variables, et ainsi de suite.

On voit donc que la classification comporte plusieurs étapes: 1) une rotation de la règle, 2) l'étude de la partie principale, 3) l'étude des termes de plus haut degré.

Une technique formelle permettant d'entreprendre ces calculs est celle des filtrations dans l'algèbre des fonctions (ou des séries). On peut associer à chaque filtration de ce type ses espaces de quasi-jets de fonctions et ses groupes filtrés de quasi-jets de difféomorphismes et ses algèbres de Lie des (quasi-) jets de champs de vecteurs.

Le cas le plus simple et le plus fréquent est celui d'une filtration quasi homogène. On est conduit à considérer alors le groupe de Lie de difféomorphismes quasi homogènes, dont le rôle dans cette théorie

---

*) Cette assertion est souvent appelée « théorème de Thom » ou « règle des sept catastrophes de Thom ». En réalité, R. Thom n'a annoncé, en 1969, qu'une classification topologique des systèmes dynamiques gradients qui conduit à cette même liste (voir [275]). La différence entre la classification de Thom et la classification différentiable exposée plus haut est à peu près la même qu'entre le non-homéomorphisme de l'ellipse et de l'hyperbole d'une part et le théorème de la réduction à la forme canonique d'une forme quadratique d'autre part. Thom affirmait que pour établir une classification topologique des systèmes gradients et de leurs diagrammes de bifurcations il suffit de classifier les fonctions et leurs bifurcations. A strictement parler, ceci n'est pas vrai (un exemple contraire au niveau de D_4 est exhibé en 1971 par J. Guckenheimer [142]). La table de bifurcations dressée par Thom pour les familles locales typiques de systèmes gradients s'est donc avérée incomplète déjà pour trois paramètres. Selon Thom, dans le cas de 4 paramètres, le nombre de bifurcations typiques de systèmes gradients locaux est sept (le « sept magique » ou le « sept célèbre » des catastrophistes). En réalité, le nombre de ces bifurcations serait de l'ordre de 20. N'est même pas strictement prouvée la finitude du nombre $\nu(l)$ de bifurcations typiques de systèmes gradients locaux dépendant de l paramètres, à l'homéomorphisme des diagrammes de bifurcation près, pour $l = 3$. Thom donne $\nu(1) = 1$, $\nu(2) = 2$. Le cas de $l = 3$ est traité dans les travaux récents de G. Vegter [314] et B. Hessine (1985). Selon Hessine, le nombre de types topologiquement distincts de D_4 dans les systèmes typiques est 3, i.e. $\nu(3) = 6$. Il serait donc plus logique d'appeler « conjecture de Thom » et non « théorème de Thom » l'affirmation portant sur la finitude du nombre de bifurcations topologiquement distinctes dans les familles l-paramétriques typiques de systèmes gradients dynamiques pour $l \leqslant 4$. Pour le moment, la finitude du nombre de bifurcations topologiquement distinctes n'est rigoureusement réfutée pour aucun l; pourtant pour un l suffisamment grand les familles locales typiques présenteraient des modules par rapport à la classification aux homéomorphismes près (cf. [231]).

est analogue à celui du groupe linéaire dans le cas des jets ordinaires (cas qui correspond à la filtration suivant les degrés de l'idéal maximal).

§ 12. Singularités quasi homogènes et semi-quasi homogènes

Nous développons un appareil de difféomorphismes quasi homogènes et semi-quasi homogènes permettant de réduire aux formes normales les singularités quasi homogènes et semi-quasi homogènes.

12.1. Fonctions quasi homogènes et filtrations.

Définition. Considérons l'espace arithmétique $\mathbf{C}^n$ muni de coordonnées fixes $x_1, \ldots, x_n$. Une fonction holomorphe $f: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ est appelée *fonction quasi homogène* de degré d à exposants $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ si pour tout $\lambda > 0$ on a $f(\lambda^{\alpha_1}x_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n}x_n) = \lambda^d f(x_1, \ldots, x_n)$. Les exposants α_s sont aussi appelés les *poids* des variables x_s.

En termes de la série de Taylor $f = \sum f_k x^k$. la condition de quasi-homogénéité de degré 1 signifie que tous les exposants des termes non nuls de la série appartiennent à l'hyperplan

$$\Gamma = \{k: \alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_n k_n = 1\}.$$

Exemple. La fonction $x^2 + y^3$ est quasi homogène de degré 1 à exposants 1/2, 1/3.

Dans le texte qui suit, nous considérerons des fonctions quasi homogènes de degré 1 à exposants rationnels, $0 < \alpha_s \leqslant 1/2$. De telles fonctions sont toujours des polynômes. L'hyperplan Γ sera appelé *diagonale*. La diagonale Γ intercepte sur les axes de coordonnées des segments de longueur $a_s = 1/\alpha_s$.

Définition. Une fonction quasi homogène f est *non dégénérée* si 0 est son point critique isolé (i.e. si 0 est un point critique de multiplicité μ finie).

Les fonctions quasi homogènes dégénérées forment une hypersurface algébrique dans l'espace vectoriel de tous les polynômes quasi homogènes à exposants de quasi-homogénéité donnés, à condition que cet espace contienne au moins une fonction non dégénérée.

A chaque type de quasi-homogénéité (i.e. à chaque famille d'exposants α) est associée une filtration particulière dans l'anneau des séries entières (fonctions, germes, etc.).

Définition. On dit qu'un monôme $x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ *est de* (*quasi-*) *degré* (*ou de poids*) d si $\langle \alpha, k \rangle = \alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_n k_n = d$.

Les (quasi-) degrés des monômes sont des nombres rationnels. Les exposants de tous les monômes de degré d (de type donné) appartiennent à un même hyperplan parallèle à la diagonale Γ. Choisissons un type de quasi-homogénéité, i.e. une famille d'exposants α.

Définition. Un polynôme (série entière, germe, fonction) *est d'ordre* d si les monômes qui le composent sont tous de degré égal ou supérieur à d ; dans le cas où d est le (quasi-) degré de tous les monômes, on dit que d est le *(quasi-) degré* du polynôme ; on admet que 0 est de degré $+\infty$.

Les polynômes (séries, germes) d'ordre d forment un espace vectoriel A_d ; $A_{d'} \subset A_d$ quand $d < d'$. L'ordre du produit étant égal à la somme des ordres des facteurs, A_d est un idéal dans l'algèbre des polynômes (séries, fonctions). Soit A cette algèbre. L'algèbre quotient A/A_d est appelée *algèbre des d-(quasi-) jets*, et ses éléments, les *d-(quasi-) jets.*

Par *ordre* φ (f) d'un polynôme (série, germe), on entend généralement le plus grand des nombres d tels que $f \in A_d$. Les ordres de tous les polynômes (séries, germes) possibles appartiennent à une même progression arithmétique rationnelle: $\varphi(f) \in \mathbb{Z}_+ d_0$, où d_0 est la plus grande commune mesure des nombres α_s (la partie initiale de la progression peut ne pas être complètement remplie de valeurs de φ).

Définition. On dit qu'un polynôme (série entière, germe) est *semi-quasi homogène de degré* d à exposants $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ s'il est de la forme $f = f_0 + f'$, où f_0 est un polynôme quasi homogène non dégénéré de degré d à exposants α, et f' un polynôme (série, germe) d'ordre strictement supérieur à d.

Autrement dit, une fonction semi-quasi homogène se déduit de la fonction quasi homogène non dégénérée par l'adjonction de monômes dont les exposants sont situés au-dessus de la diagonale. Remarquons qu'une fonction quasi homogène dégénérée n'est jamais semi-quasi homogène.

Donnons-nous une famille de monômes qui forment une base dans l'algèbre locale pour un polynôme quasi homogène non dégénéré f_0. Soit $e_1, \ldots, e_s$ la famille de tous les monômes de base dont les exposants sont situés strictement au-dessus de la diagonale.

Théorème. *Toute fonction semi-quasi homogène de partie quasi homogène* f_0 *est équivalente à une fonction de la forme* $f_0 + \sum c_k e_k$, *où les* c_k *sont des constantes.*

Exemple 1. Si $f_0 = x^2y + y^k$, alors $f \sim f_0$.

Exemple 2. Si $f_0 = x^5 + y^5$, alors $f \sim x^5 + y^5 + cx^3y^3$.

D é m o n s t r a t i o n. Voir nº 12.6.

12.2. Multiplicité et générateurs de l'algèbre locale d'une fonction semi-quasi homogène. D'abord nous montrerons qu'une base monomiale de l'algèbre locale d'une fonction holomorphe quasi homogène non dégénérée est aussi une base pour toute fonction semi-quasi

homogène dont la partie quasi homogène est la fonction mentionnée. On peut admettre sans perte de généralité que la partie quasi homogène soit de degré $d = 1$.

Théorème. *La multiplicité du point critique* 0 *d'une fonction semi-quasi homogène f est égale à celle du point critique* 0 *de sa partie quasi homogène*: $\mu(f) = \mu(f_0)$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit une famille de sphères topologiques

$$S_t = \{x \in \mathbf{C}^n:\ |x_1|^{a_1} + \ldots + |x_n|^{a_n} = t\}, \quad a_s = 1/\alpha_s.$$

La quantité $\mu(f)$ est égale au degré de l'application

$$x \mapsto (\partial f/\partial x)/\|\partial f/\partial x\|,\ x \in S\ ,$$

pour t petit. Pour tout point $x \in S_1$, il existe au moins une dérivée $\partial f_0/\partial x_s$ non nulle (puisque f_0 est non dégénérée). Il existe donc une constante c telle que $\max_s |\partial f_0/\partial x_s| \geqslant c > 0$ sur S_1. Remarquons que $S_t = T_t S_1$, où $T_t(x_1, \ldots, x_n) = (t^{\alpha_1}x_1, \ldots, \ldots, t^{\alpha_n}x_n)$. Ensuite, la dérivée partielle $\partial f_0/\partial x_s$ est quasi homogène de degré $1 - \alpha_s$ de type α. Par conséquent, on a $|\partial f_0/\partial x_s| \geqslant ct^{1-\alpha_s}$ en tout point de la sphère S_t au moins pour un s.

D'autre part, f' est d'ordre non inférieur à $1 + d_0$, où d_0 est la commune mesure des α_s. Il existe donc une constante C telle que $|\partial f'/\partial x_s| \leqslant Ct^{1+d_0-\alpha_s}$ sur S_t pour s quelconque.

La comparaison avec l'inégalité précédente nous montre que, pour t suffisamment petit, on ne trouve sur S_t aucun point critique de fonctions $f_0 + \theta f'$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Par conséquent, les applications sphère sur sphère définies par les gradients f_0 et $f_0 + f'$ ont même degré, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. On montre d'une façon analogue que toutes les fonctions quasi homogènes suffisamment proches de f_0 et de même degré de quasi-homogénéité que f_0 ont même multiplicité μ. Ensuite, puisque les fonctions quasi homogènes non dégénérées d'un degré donné forment un ensemble connexe, la multiplicité μ est la même pour toutes les fonctions quasi homogènes non dégénérées de degré donné (et donc pour toutes les fonctions semi-quasi homogènes de degré donné et de type donné).

La multiplicité μ du point critique 0 de f se laisse définir aussi en tant que dimension de l'algèbre locale

$$Q_f = \mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]/(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n).$$

Par abus de langage, nous appellerons base de l'algèbre locale de f une famille de μ séries (polynômes, germes) qui devient base de Q_f sur $\mathbf{C}$ par passage au quotient par l'idéal.

Le théorème cité donne lieu au

Corollaire. *Supposons que la famille de monômes $e_1, \ldots, e_\mu$ soit base de l'algèbre locale de la partie quasi homogène f_0 d'une fonction semi-quasi homogène f. La même famille de monômes définit alors une base de l'algèbre locale de f.*

La démonstration du corollaire s'appuie sur un lemme de caractère général:

Lemme. *Supposons qu'une famille de fonctions différentiables f dépendant continûment d'un nombre fini de paramètres ait pour toutes valeurs des paramètres un point critique 0 de multiplicité finie μ constante. Alors toute base de l'algèbre locale de la fonction correspondant à la valeur nulle de paramètres reste base de l'algèbre locale pour toute valeur proche des paramètres.*

Démonstration du lemme. Le lemme découle du fait que si, dans un espace de dimension finie, sont donnés une famille de vecteurs formant une base d'espace transversal et un sous-espace qui dépendent différentiablement de paramètres, cette famille reste base d'espace transversal pour des valeurs des paramètres proches des valeurs initiales.

Pour rendre l'espace de dimension finie, il suffit de passer au quotient de l'algèbre $\mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ par un idéal maximal de degré suffisamment élevé (par exemple $\mu + 1$, voir n° 6.4).

Démonstration du corollaire. Soit une fonction semi-quasi homogène $f = f_0 + f'$. Montrons que le passage de f_0 à f peut être considéré comme une *petite déformation*. Construisons une famille 1-paramétrique de fonctions $f_t(x) = t^{-1}f(T_tx)$, où $T_tx = (t^{\alpha_1}x_1, \ldots, t^{\alpha_n}x_n)$. On a $f_t(x) = f_0 + t^{-1}f'(T_tx)$, où tous les coefficients du deuxième terme dépendent continûment de t, car l'ordre de f' est supérieur à 1. D'après le lemme, une base de l'algèbre locale de f_0 reste base de l'algèbre locale de f_t si t est suffisamment petit. Une base de l'algèbre locale de f_t passe à une base de l'algèbre locale de f sous l'action du difféomorphisme T_t qui lie f et f_t. Or, tout monôme se transforme par T_t en un monôme proportionnel. Aussi une base monomiale de Q_{f_0} est-elle non seulement base de Q_{f_t} pour t petit mais aussi celle de Q_f, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. *Le nombre des monômes de base, de (quasi-) degré δ donné, de l'algèbre locale d'une fonction quasi homogène ou semi-quasi homogène f est indépendant du choix de la base monomiale dans l'algèbre locale.*

Démonstration. Considérons l'espace quotient

$$A_\delta/(A_{>\delta} + A_\delta \cap I),$$

où $I = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$, A_δ est l'espace des séries d'ordre δ dans $\mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$, $A_{>\delta}$ l'espace des séries d'ordre supérieur à δ.

Le nombre des monômes de base de degré δ est égal à la dimension de l'espace quotient en question, donc indépend nt du choix de la base.

Corollaire. *Le nombre des monômes de base, de (quasi-) degré donné (pour un type α donné), de l'algèbre locale d'une fonction f est le même pour toutes les fonctions semi-quasi homogènes f du type α donné de degré d.*

Démonstration. Il suffit de considérer des fonctions quasi homogènes non dégénérées (une fonction semi-quasi homogène a la même base). Les fonctions quasi homogènes non dégénérées d'un degré d donné (du type α) forment une variété connexe par arcs (qui, si elle est non vide, forme le complémentaire d'une hypersurface dans l'espace vectoriel). Le nombre des monômes de base de degré δ de l'algèbre locale est localement constant le long d'un arc joignant deux points quelconques de cette variété, car une même base convient à deux fonctions proches (voir lemme). Par conséquent, le nombre des monômes de base est constant, ce qu'il fallait démontrer.

12.3. Applications quasi homogènes. Dans ce n° nous calculerons quelques caractéristiques numériques des applications quasi homogènes, en particulier la multiplicité μ et le polynôme de Poincaré p.

Choisissons le type de quasi-homogénéité $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans l'espace $\mathbf{C}^n$ muni d'un système de coordonnées fixe. Nous considérerons des applications $F: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ en utilisant les notations désuètes $F(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$. Soit $d = (d_1, \ldots, d_n)$ un vecteur à composantes non négatives.

Définition. On dit que l'application F est *quasi homogène de degré d (de type α)* si chaque composante F_s de F est fonction quasi homogène de degré d_s d'un même type α.

Par algèbre locale de F, on entend l'algèbre quotient

$$Q(F) = \mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]/(F_1, \ldots, F_n).$$

On dit que l'application F est *non dégénérée* si sa multiplicité en 0 est finie, i.e. si son algèbre locale $Q(F)$ est de dimension finie sur $\mathbf{C}$; cette dimension $\mu = \dim_{\mathbf{C}} Q(F)$ est appelée *multiplicité de F* en 0.

On dit que l'application F est *semi-quasi homogène* si $F = F_0 + F'$, où F_0 est une application quasi homogène non dégénérée et chaque composante F'_s a un ordre supérieur au degré de la composante correspondante F_{0s}.

Si f est une fonction semi-quasi homogène de degré d (de type α), l'application $x \mapsto \operatorname{grad} f(x)$ est semi-quasi homogène de degré $d_s = d - \alpha_s$.

Proposition 1. *Les assertions du* n° 12.2 *sont vraies non seulement pour les applications gradientes $x \to$* grad $f(x)$ *(pour lesquelles elles*

ont été formulées) mais aussi pour toute application quasi homogène ou semi-quasi homogène.

Par exemple, toutes les applications semi-quasi homogènes de même degré d (et de même type α) ont même multiplicité μ.

Remarque. Ces résultats restent vrais sur tout corps commutatif algébriquement clos (A. Kushnirenko [179]). Dans le cas du corps $\mathbf{C}$ la démonstration se fait comme dans le n° 12.2.

La classe des applications quasi homogènes est fort utile pour l'étude des fonctions quasi homogènes, car les homotopies et les changements des variables y sont plus faciles que dans le cas des gradients. En particulier, la proposition suivante (cf. [219]) permet de passer par une simple substitution de l'application quasi homogène à une application homogène.

Proposition 2. *Soit $F: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ une application quasi homogène dont le type et le degré ont même dénominateur N: $\alpha_s = A_s/N$ et $d_s = D_s/N$, où A_s, D_s et N sont des entiers. Considérons une application $T: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ définie par*

$$T(y_1, \ldots, y_n) = (y_1^{A_1}, \ldots, y_n^{A_n}).$$

Alors:

1) *L'application $F \circ T: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ a pour composantes des fonctions homogènes (au sens habituel) de degrés $D_1, \ldots, D_s$.*

2) $\mu(F \circ T) = \mu(F) \Pi A_s$.

3) *Si $e_1, \ldots, e_\mu$ est une base monomiale de l'algèbre locale de l'application F, une base monomiale de l'algèbre locale de l'application $F \circ T$ est formée de fonctions*

$$e'_{i,u} = (T^* e_i) y_1^{u_1} \ldots y_n^{u_n}, \quad \text{où} \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu, \quad 0 \leqslant u_s < A_s.$$

Démonstration. 1) Un monôme x^k définit dans la s-ième composante de l'application $F \circ T$ un monôme $\Pi y_s^{k_s A_s}$ de degré $\sum k_s A_s = N(k, \alpha) = N d_s = D_s$.

2) La formule de la multiplicité s'obtient en discutant le système d'équations $(F \circ T)(y) = \varepsilon$ par rapport à y.

3) Les fonctions $e'_{i,u}$ engendrent l'algèbre locale tout entière. En effet, toute fonction de y se laisse mettre sous la forme $\varphi = \sum_u y^u T^* \varphi_u$, et toute fonction de x, sous la forme $\varphi_u = \sum c_{i,u} e_i + \sum F_s h_{s,u}$. Donc,

$$\varphi = \sum_{u,i} c_{i,u} y^u T^* e_i + \sum_{u,s} y^u h_{s,u} T^* F_s,$$

i.e. les $e'_{i,u}$ engendrent $Q(F \circ T)$. Puisque le nombre des fonctions $e'_{i,u}$ est égal à $\mu(F \circ T)$, elles forment une base. La proposition 2 est démontrée.

Définition. On appelle *polynôme de Poincaré de l'application semi-quasi homogène F* (avec $\alpha_s = A_s/N$, où A_s et N sont des entiers)

un polynôme $p_F(t) = \sum \mu_i t^i$, où μ_i est le nombre des monômes de base de l'algèbre locale de F de quasi-degré i/N.

Remarquons que même pour un type de quasi-homogénéité donné, p dépend en outre de l'entier N. Cependant tous les N possibles admettent un commun multiple, à savoir le plus petit commun dénominateur des fractions α_s et $p_{F;\,kN,\,\alpha}(t) = p_{F;\,N,\,\alpha}(t^k)$. La dimension de l'algèbre locale se définit par la formule $\mu = p_F(1)$. Le degré du polynôme p_F est le plus grand des quasi-degrés (multipliés par N) des monômes générateurs de base de l'algèbre locale.

Théorème (cf. [18], [63], [229]). *Le polynôme de Poincaré d'une application (semi-) quasi homogène F de degré d de type α telle que $\alpha_s = A_s/N$, $d_s = D_s/N$ (A_s, D_s, N entiers) est égal à*

$$p_F(t) = \prod_{s=1}^{n} \frac{t^{D_s}-1}{t^{A_s}-1}.$$

Exemple. Si $F = \operatorname{grad} f$, où f est une fonction (semi-) quasi homogène de type α (de degré 1), on a

$$p_F(t) = \prod_{s=1}^{n} \frac{t^{N-A_s}-1}{t^{A_s}-1}.$$

Ce théorème donne immédiatement lieu à quelques formules utiles.

Corollaire 1 (cf. [18], [63], [219]). *La dimension de l'algèbre locale d'une application semi-quasi homogène est définie par la « formule de Bésout généralisée »*

$$\mu = \prod_{s=1}^{n} \frac{d_s}{\alpha_s}.$$

Corollaire 2 ([18], [249]). *L'algèbre locale d'une application semi-quasi homogène F admet exactement un monôme de base de (quasi-) degré*

$$d_{\max} = \sum_{s=1}^{n} (d_s - \alpha_s);$$

tous les monômes d'ordre plus élevé appartiennent à l'idéal engendré par les composantes $(F_1, \ldots, F_n)$.

Considérons en particulier l'algèbre locale d'une fonction semi-quasi homogène f de type $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de degré 1. On a alors $d_s = 1 - \alpha_s$, d'où le

Corollaire 3 (cf. [18], [63], [219]). *La dimension de l'algèbre locale d'une fonction semi-quasi homogène f de type $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de degré 1*

se définit par la formule

$$\mu = \prod \left(\frac{1}{\alpha_s} - 1\right).$$

Corollaire 4 (voir [18], [249]). *Une base monomiale de l'algèbre locale d'une fonction semi-quasi homogène f de type* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *de degré 1 admet exactement un générateur de degré (généralisé)* $d_{\max} = \sum (1 - 2\alpha_s)$; *tous les monômes de degré plus élevé appartiennent à l'idéal* $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$.

Voici quelques autres conséquences immédiates du théorème.

Corollaire (voir [18]). *Le polynôme de Poincaré d'une application semi-quasi homogène est toujours récurrent:*

$$\mu_i = \mu_{k-i},$$

où $k = \sum D_s - \sum A_s$.

Corollaire (voir [18]). *Le degré généralisé de l'avant-dernier (en quasi-degré) monôme d'une base monomiale de l'algèbre locale d'une fonction quasi homogène de type* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *de degré 1 est égal à* $d_{\max} - \alpha_{\min}$, *où* $\alpha_{\min} = \min(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Corollaire (voir [18]). *Une application quasi homogène non dégénérée de type* $\alpha = A/N$ *de degré* $d = D/N$ *ne peut exister que si le polynôme* $\prod (t^{D_s} - 1)$ *est divisible par* $\prod (t^{A_s} - 1)$.

Corollaire (voir [18]). *Une fonction quasi homogène non dégénérée de type* α $(\alpha_s = A_s/N)$ *ne peut exister que si* $\prod (t^{N-A_s} - 1)/\prod (t^{A_s} - 1)$ *est un polynôme.*

Remarque. Dans le cas des fonctions de deux et de trois variables, la réductibilité de la fraction $\prod (t^{N-A_s} - 1)/\prod (t^{A_s} - 1)$ est à la fois la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une fonction quasi homogène non dégénérée à exposants A_s/N (voir § 13, p. 184). Ce n'est pas le cas pour les fonctions de quatre variables, comme le montre un exemple dû à B. Ivlev:

$$N = 265, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 24, \quad A_3 = 33, \quad A_4 = 58.$$

Dans cet exemple, le quotient est un polynôme à coefficients non négatifs, mais toutes les fonctions quasi homogènes à exposants A_s/N sont dégénérées.

Les résultats énumérés ci-dessus ont été maintes fois redécouverts (Milnor, Orlik et Wagreich, Saito, Hironaka). En fait, on trouve déjà ces résultats dans Bourbaki [63] (voir prop. 2, n° 1, § 5, chap. 5, titre « Série de Poincaré d'une algèbre graduée »).

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e. Il suffit de considérer le cas où F est une application quasi homogène non dégénérée (voir n° 12.2 et proposition 1). Faisons le changement T dont on a

usé dans la proposition 2. De la forme des générateurs de l'algèbre locale de $F \circ T$ il ressort que

$$p_{F \circ T;\ 1,\ 1}(t) = p_{F;\ N,\ \alpha}(t)\, p_{T;\ 1,\ 1}(t), \quad \text{où} \quad 1 = (1, \ldots, 1).$$

Il est facile de calculer sous forme explicite les polynômes de Poincaré des applications homogènes au sens habituel T et $F \circ T$ intervenant dans cette formule. En effet, pour l'application $x = y^A$ on a

$$p(t) = \frac{t^A - 1}{t - 1},$$

d'où

$$p_T(t) = \prod_{s=1}^{n} \frac{t^{A_s} - 1}{t - 1}$$

(ici et dans le texte qui suit, on omet d'indiquer le couple $(N, \alpha) = (1, 1)$ dans la notation de p).

D'autre part, $F \circ T$ est une application non dégénérée, qui admet comme composantes des fonctions homogènes de degrés D_s. Par conséquent (en accord avec la proposition 1 et le n° 12.2), elle a le même polynôme de Poincaré que toute autre application homogène non dégénérée de mêmes degrés. Ce peut être par exemple une application T' telle que

$$T'(y_1, \ldots, y_n) = (y_1^{D_1}, \ldots, y_n^{D_n}).$$

Donc,

$$p_{F \circ T}(t) = p_{T'}(t) = \prod_{s=1}^{n} \frac{t^{D_s} - 1}{t - 1}.$$

La formule de p_F s'obtient par division des formules de $p_{F \circ T}$ et de p_T. Le théorème est démontré.

12.4. Difféomorphismes quasi homogènes et quasi-jets. Plusieurs groupes et algèbres de Lie sont associés à la filtration définie par le type de quasi-homogénéité α. Dans le cas de l'homogénéité ordinaire, ce sont le groupe linéaire, le groupe des k-jets des difféomorphismes, son sous-groupe des k-jets à k—1-jet identique et leurs groupes quotients. Pour la filtration quasi homogène, on a des groupes analogues qui se définissent comme suit.

Considérons un espace $\mathbf{C}^n$ rapporté à un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ figé. Désignons l'algèbre des séries entières formelles *) des coordonnées par $A = \mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$. Le type de quasi-

*) La plupart des résultats qui vont suivre s'étendent immédiatement au cas où A est l'algèbre des séries convergentes sur $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{R}$ ou l'algèbre de germes de fonctions différentiables.

homogénéité est supposé donné : $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Par A_d nous désignons l'idéal de l'algèbre A engendré par les séries d'ordre égal ou supérieur à d. Ensuite, nous désignons par $A_{>d}$ l'idéal de l'algèbre A_d engendré par les séries d'ordre strictement supérieur à d.

Un *difféomorphisme formel* g: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ se définit par une famille de n séries entières sans terme constant et définit un isomorphisme d'algèbres $g^* : A \to A$ d'après la formule $g^*f = f \circ g$, où $\circ$ est la substitution d'une série dans une autre.

Définition. Le difféomorphisme *g est d'ordre d* si pour tout λ on a

$$(g^* - 1) A_\lambda \subset A_{\lambda+d}.$$

Proposition 1. *Soit $d \geqslant 0$. Alors l'ensemble de tous les difféomorphismes d'ordre d muni de l'opération $\circ$ forme un groupe $G_d = G_d(\alpha)$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si $d \geqslant 0$, on a $g^*A_\lambda = A_\lambda$ pour λ quelconque ($g^*A_\lambda \subset A_\lambda$, car $d \geqslant 0$, et $g^{*-1}A_\lambda \subset A_\lambda$, parce que l'espace quotient A/A_λ est de dimension finie). On a donc pour $a, b \in G_d$

$$[(a \circ b)^* - 1] A_\lambda = [b^* (a^* - 1) + (b^* - 1)] A_\lambda \subset A_{\lambda+d},$$

$$(a^{-1*} - 1) A_\lambda = a^{-1*} (1 - a^*) A_\lambda \subset A_{\lambda+d},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 2. *Le groupe G_q est un sous-groupe distingué dans G_p si $q > p \geqslant 0$.*

Démonstration. La définition de G_q n'implique que la filtration $\{A_\lambda\}$. Invariante par G_0, cette filtration est *a fortiori* invariante par le groupe G_p plus petit. Il s'ensuit qu'un sous-groupe défini en termes de cette filtration est invariant, ce qu'il fallait démontrer.

Le groupe G_0 est dans le cas quasi homogène ce qu'est le groupe des jets de difféomorphismes dans le cas homogène. Il est à noter que dans le cas quasi homogène certains difféomorphismes ont des ordres négatifs et ne figurent pas dans G_0.

Définition. On appelle *groupe des d-(quasi-)jets de type α* le groupe quotient du groupe des difféomorphismes par le sous-groupe des difféomorphismes d'ordre supérieur à d:

$$J_d = J_d(\alpha) = G_0/G_{>d}.$$

Il est clair que J_d est un groupe de Lie de dimension finie. Il existe des factorisations canoniques $\pi_{p,q}$: $J_p \to J_q$ $(p > q \geqslant 0)$.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que dans le cas homogène ordinaire notre numérotation est décalée de 1 par rapport

à la numérotation standard : notre J_0 est le groupe des 1-jets, et ainsi de suite.

Proposition 3. *On peut déduire le groupe J_p de J_0 par une suite d'extensions à fibres commutatives. Plus exactement, soit A_p le terme de la filtration immédiatement postérieur à A_q. Alors le noyau K de l'homomorphisme $\pi_{p,q}$ est commutatif.*

Démonstration. Soient A, $B \in K$. Considérons leurs représentants quelconques a, $b \in G_0$. On a l'identité

$$(a \circ b)^* - 1 = (a^* - 1) + (b^* - 1) + (b^* - 1)(a^* - 1).$$

Ensuite, pour tout λ on a

$$(a^* - 1) A_\lambda \subset A_{\lambda+p}, \quad (b^* - 1) A_\lambda \subset A_{\lambda+p},$$

car les q-jets de a et b sont triviaux. Donc $[(a \circ b)^* - (b \circ a)^*] A_\lambda \subset \subset A_{\lambda+2p}$. Par conséquent, $a \circ b$ et $b \circ a$ définissent le même élément de J_p, ce qu'il fallait démontrer.

Une importance particulière revient au groupe J_0 qui est une généralisation quasi homogène du groupe linéaire.

Définition. On dit que le difféomorphisme $g \in G_0$ est *quasi homogène de type α* s'il renvoie à lui-même chacun des espaces de fonctions quasi homogènes de degré d (de type α).

L'ensemble de tous les difféomorphismes quasi homogènes (d'un type fixé) a une structure de groupe. Noté $H(=H(\alpha))$, ce groupe s'appelle *groupe des difféomorphismes quasi homogènes.*

Considérons l'injection canonique i: $H \to G_0$ et la factorisation π: $G_0 \to J_0$.

Proposition 4. *Le groupe J_0 est canoniquement isomorphe au groupe H des difféomorphismes quasi homogènes ; plus exactement, l'application composée πi: $H \to J_0$ est un isomorphisme de groupes de Lie.*

Démonstration. a) $\operatorname{Ker} \pi i = e$. En effet, $\operatorname{Ker} \pi i = = H \cap G_{>0}$. Donc, pour un $h \in \operatorname{Ker} \pi i$ et pour tout monôme f de degré d, $(h^* - 1) f$ appartient à l'espace des fonctions homogènes de degré d, tout en étant d'un ordre supérieur à d. Donc $(h^* - 1) f = 0$ pour tout monôme f, d'où $h = e$.

b) $\operatorname{Im} \pi i = J_0$. Pour le démontrer, écrivons sous forme explicite l'application inverse $J_0 \to H$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des coordonnées dans $\mathbf{C}^n$, et soit un difféomorphisme $g \in G_0$, représentant d'un jet $j \in J_0$. Considérons la série $g^* x_i \in A_{\alpha_i}$. Isolons dans cette série une composante homogène y_i de degré α_i, de sorte que $g^* x_i = y_i + z_i$, $z_i \in A_{>\alpha_i}$. Définissons une application polynomiale h^{-1}: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ par la relation $h^* x_i = y_i$. Pour voir si h est bien un difféomorphisme, calculons le déterminant jacobien :

$$\det \left| \frac{\partial (y_i + z_i)}{\partial x_j} \right| = \det \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| + R.$$

Le terme R contenant des dérivées de z s'annule à l'origine. En effet, chaque terme du déterminant de y est homogène de degré 0 en x. Tous les termes en z sont d'ordre positif, car $z_i \in A_{>d_i}$. Aussi $R \in A_{>0}$ et $R(0) = 0$. Les jacobiens de g et de h en 0 coïncident, ce qui signifie que le jacobien de h en 0 est non nul, d'où il ressort que h est bien un difféomorphisme. L'automorphisme d'algèbres h^* conserve les degrés de tous les monômes, car il conserve les degrés des coordonnées x_i. Il s'ensuit que $h \in H$. De toute évidence $\pi ih = j$, et la proposition est démontrée.

Proposition 5. *Soit $d \geqslant 0$. Alors le groupe J_d des d-quasi-jets de difféomorphismes opère comme le groupe des transformations linéaires sur l'espace $A/A_{>d}$ des d-quasi-jets de fonctions.*

Démonstration. Soit $g \in G_{>d}$. Alors l'action de g laisse invariant le d-quasi-jet de toute fonction f, car $f \circ g - f \in A_{>d}$. Par conséquent, l'application $(h, f) \mapsto f \circ h$ définit une application $J_d \times (A/A_{>d}) \to A/A_{>d}$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Au cas où l'homogénéité s'entend au sens ordinaire, on a déjà le groupe des $(k-1)$-jets de difféomorphismes opérant sur l'espace des k-jets de fonctions (dans nos notations). L'action analogue dans le cas quasi homogène est celle du groupe des $(d - \min \alpha_s)$-jets.

12.5. Champs de vecteurs quasi homogènes. Dans le cas infinitésimal, les notions introduites ci-dessus se présentent comme suit.

Définition. Un champ de vecteurs formel $v = \sum v_i \partial/\partial x_i$ *est d'ordre d* si la dérivation le long de v augmente l'ordre de toute fonction d'au moins d: $L_v A_\lambda \subset A_{\lambda+d}$. Soit $\mathfrak{g}_d$ l'ensemble des champs de vecteurs d'ordre d. La filtration introduite dans le module des champs de vecteurs (i.e. des dérivations de l'algèbre A) est compatible avec la filtration dans l'algèbre:

$$a \in A_d, \quad v \in \mathfrak{g}_\delta \Rightarrow av \in \mathfrak{g}_{d+\delta}, \quad L_v a \in A_{d+\delta}.$$

Proposition. *Soit $d \geqslant 0$. Alors* 1) *le crochet de Poisson de deux champs de vecteurs munit l'espace $\mathfrak{g}_d$ d'une structure d'algèbre de Lie,* 2) *le crochet de Poisson de deux éléments de $\mathfrak{g}_{d_1}$ et de $\mathfrak{g}_{d_2}$ appartient à $\mathfrak{g}_{d_1+d_2}$ si bien que chaque $\mathfrak{g}_d$ est un idéal dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$.*

Démonstration. Si $f \in A_\lambda$, $v_1 \in \mathfrak{g}_{d_1}$, $v_2 \in \mathfrak{g}_{d_2}$, alors $(L_{v_1} L_{v_2} - L_{v_2} L_{v_1}) f \in A_{\lambda+d_1+d_2}$, ce qu'il fallait démontrer.

L'ordre d'un champ de vecteurs est lié par une relation déterminée aux ordres de ses composantes.

Proposition. *Un champ $v = \sum v_i \partial/\partial x_i$ est d'ordre d (de type α) si et seulement si chacune de ses composantes v_i est une fonction (série) d'ordre $d + \alpha_i$.*

Avant de démontrer cette proposition, définissons quelques notions. Nous appellerons *monôme vecteur* un champ de vecteurs de la forme $x^k \partial/\partial x_i$. Son *degré*, pour un type de quasi-homogénéité donné, sera un entier rationnel (peut-être négatif) $\langle k, \alpha\rangle - \alpha_i = \langle k - 1_i, \alpha\rangle$ de la même progression arithmétique à laquelle appartiennent les degrés des monômes ordinaires. Nous dirons d'un champ de vecteurs qu'il est (*quasi*) *homogène de degré d* si tous ses monômes vecteurs à coefficients non nuls sont de degré d.

D é m o n s t r a t i o n d e l a p r o p o s i t i o n. Si $v \in \mathfrak{g}_d$, alors $v_i = L_v x_i \in A_{d+\alpha_i}$, car $x_i \in A_{\alpha_i}$. Soit $v_i = \sum v_{i,k} x^k$. Pour tout monôme $f = x^l$ on a

$$L_v f = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum l_i v_{i,k} x^{l+k-1_i}.$$

Si de plus $v_i \in A_{d+\alpha_i}$, alors $\langle k, \alpha\rangle \geqslant d + \alpha_i$. Donc $\langle l+k-1_i, \alpha\rangle \geqslant \langle l, \alpha\rangle + d$, i.e. $L_v A_\lambda \subset A_{\lambda+d}$, ce qu'il fallait démontrer.

La proposition 3 du nº 12.4 donne immédiatement lieu au

Corollaire. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{j}_d$ *d'un groupe* J_d *des d-quasi-jets de difféomorphismes est l'algèbre quotient* $\mathfrak{j}_d = \mathfrak{g}_0/\mathfrak{g}_{>d}$. *Les applications* $\pi_{p,q}\colon J_p \to J_q$ *induisent des homomorphismes d'algèbres* $\pi_{p,q*}\colon \mathfrak{j}_p \to \mathfrak{j}_q$. *Le noyau de l'application de* $\mathfrak{j}_p$ *dans l'algèbre des jets d'ordre immédiatement inférieur est commutatif.*

Enfin, de la proposition 4 du nº 12.4 découle le

Corollaire. *Les champs de vecteurs quasi homogènes de degré* 0 *forment, dans l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs, une sous-algèbre de Lie* $\mathfrak{a}$ *de dimension finie. L'algèbre de Lie* $\mathfrak{a}$ *est canoniquement isomorphe à l'algèbre de Lie* $\mathfrak{j}_0$ *du groupe des 0-jets de difféomorphismes.*

Dans le texte qui suit, nous identifierons parfois les champs de vecteurs v avec des familles de n fonctions (ou séries) v_i.

Les deux propositions suivantes seront utiles par la suite pour la réduction à la forme normale des fonctions semi-quasi homogènes.

Lemme. *Soit F une série entière d'ordre d, et soit v un champ de vecteurs formel d'ordre* δ *positif. Alors le terme résiduel R du développement taylorien*

$$F(x+v(x)) = F(x) + \frac{\partial F}{\partial x} v + R$$

est d'ordre strictement supérieur à $d+\delta$.

D é m o n s t r a t i o n. Puisque R est linéaire en F, il suffit de démontrer la proposition pour le cas où F est un monôme. Soient $F = x^k$, $v = \sum v_i \partial/\partial x_i$. Considérons un terme du développe-

ment taylorien qui contienne $\partial^{|m|}F/\partial x^m$, $m=(m_1, \ldots, m_n)$. Les monômes composant ce terme ont les exposants $p=k-m+\sum_{i=1}^{n} l_i$, où l_i est l'exposant de l'un des monômes de la fonction $v_i^{m_i}$. On a donc $l_i=\sum_{j=1}^{m_i} l_{i,j}$, où $l_{i,j}$, est un des exposants l du développement $v_i=\sum v_{i,l}x^l$. Donc,

$$p=k+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(l_{i,j}-1_i).$$

Or, puisque par définition $\langle k, \alpha\rangle \geqslant d$, $\langle l_{i,j}-1_i, \alpha\rangle \geqslant \delta > 0$, on a $\langle p, \alpha\rangle \geqslant d+|m|\delta$, où $|m|=m_1+\ldots+m_n$. Il s'ensuit que tous les monômes des termes de degré supérieur à 1 en v du développement taylorien sont d'ordre non inférieur à $d+2\delta$, ce qu'il fallait démontrer.

Estimation. *Soit* $F=F_0+F_1+F_2$, *où* $F_0 \in A_d$, $F_1 \in A_{>d}$, $F_2 \in A_{>d+\delta}$; $v=v_0+v_1$, *où* $v_0 \in \mathfrak{g}_\delta$, $v_1 \in \mathfrak{g}_{>\delta}$, $\delta>0$. *Alors*

$$F(x+v(x))=F_0(x)+\left[F_1(x)+\frac{\partial F_0}{\partial x}v_0\right]+R', \qquad R' \in A_{>d+\delta}.$$

Démonstration. Soit $F_0+F_1=F'$. On a $R'=R_1+R_2+R_3+R_4$, où

$$R_1=F'(x+v(x))-F'(x)-\frac{\partial F'}{\partial x}v \in A_{>d+\delta} \text{ (vu le lemme)},$$

$$R_2=\frac{\partial F_0}{\partial x}v_1=L_{v_1}F_0 \in A_{>d+\delta},$$

$$R_3=\frac{\partial F_1}{\partial x}v=L_vF_1 \in A_{>d+\delta},$$

$$R_4=F_2(x+v(x)) \in A_{>d+\delta},$$

ce qu'il fallait démontrer.

12.6. Forme normale d'une fonction semi-quasi homogène. Considérons l'algèbre locale d'une fonction quasi homogène ou semi-quasi homogène f de degré d. Choisissons une famille de monômes qui forme une base de cette algèbre.

Définition. On dit qu'un monôme est *supérieur* (ou *situé au-dessus de la diagonale*) (resp. *inférieur*, resp. *diagonal*) si, pour les exposants de quasi-homogénéité donnés, il est de degré supérieur à d (resp. inférieur à d, resp. égal à d).

Remarquons que les nombres de monômes de base supérieurs, diagonaux et inférieurs sont indépendants du choix de la base (voir n° 12.2).

Soit $e_1, \ldots, e_s$ la famille de tous les monômes supérieurs d'une base donnée de l'algèbre locale d'une fonction f_0.

Théorème (voir [18]). *Toute fonction semi-quasi homogène de partie quasi homogène f_0 est équivalente à une fonction de la forme $f_0 + \sum c_k e_k$, où c_k sont des constantes.*

La démonstration du théorème repose sur le

Lemme. *Soit f_0 une fonction quasi homogène de degré d, et soient $e_1, \ldots, e_r$ tous les monômes de base d'un degré donné $d' > d$ dans l'algèbre locale de f_0. On peut alors réduire, par un difféomorphisme formel, toute série de la forme $f_0 + f_1$, où l'ordre de f_1 est supérieur à d, à la forme $f_0 + f_1'$, les termes de f_1' de degré inférieur à d' étant les mêmes que dans f_1 et ses termes de degré d' se réduisant à $c_1e_1 + \ldots + c_re_r$.*

Démonstration. Soit g la somme des termes de f_1 de degré d'. Il existe un développement (si l'on veut, à des termes d'ordre supérieur à d' près, mais en réalité aussi sans ces termes)

$$g = \sum \frac{\partial f_0}{\partial x_i} v_i(x) + c_1e_1 + \ldots + c_re_r,$$

car $e_1, \ldots, e_r$ sont les monômes de base. La formule reste vraie si au lieu du champ de vecteurs v on met un champ homogène de degré $\delta = d' - d > 0$ (pour le montrer, il suffit de décomposer v en composantes homogènes).

Considérons maintenant un changement de variables formel $x = y - v(y)$. Montrons que c'est un difféomorphisme formel. En effet, le champ v étant de degré δ positif, en numérotant les coordonnées dans l'ordre décroissant des exposants α_i, la matrice jacobienne du changement en 0 sera trigonale, avec des 1 sur la diagonale. L'estimation du n° 12.5 nous donne

$$f(y - v(y)) = f_0(y) + [f_1(y) + \\ + (c_1e_1(y) + \ldots + c_re_r(y)) - g(y)] + R'(y)$$

(en utilisant des notations désuètes). Puisque R' est d'ordre supérieur à d', le lemme est démontré.

Démonstration du théorème. Appliquant le lemme à la fonction f_0 et aux monômes de degré immédiatement supérieur, d', nous mettrons les termes de degré d' sous la forme cherchée. Appliquant le lemme à la nouvelle série $f_0 + f_1'$ et aux monômes de degré immédiatement supérieur, d'', nous mettrons les termes de degré d'' sous la forme cherchée sans toucher aux termes des degrés d et d'. En itérant cette procédure, nous finirons par obtenir la forme

normale désirée aux termes près d'un degré aussi élevé que l'on veut (on peut même si l'on veut réduire complètement la série formelle à la forme normale formelle par un difféomorphisme formel : la possibilité en est assurée par la croissance des degrés des champs v d'étape en étape).

Nous n'avons jamais invoqué jusqu'à présent la finitude de la multiplicité μ, si bien que l'assertion formelle énoncée est démontrée sans cette hypothèse. Or, si μ est finie, une portion suffisamment longue de la série taylorienne (de degré $\mu + 1$, cf. n° 6.4) de la fonction est équivalente à la fonction elle-même, aussi la réduction à la forme normale s'opère-t-elle par un difféomorphisme véritable.

12.7. Filtration de Newton. Sont souvent utiles des filtrations dont la diagonale est une ligne brisée de Newton (ou, dans le cas multidimensionnel, un polyèdre tournant sa convexité vers 0). Voici la définition formelle.

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ une suite fixée de types de quasi-homogénéité. Dans une i-ième filtration un monôme x^k est de degré $\langle \alpha_i, k\rangle = \varphi_i(k)$. Le *degré newtonien* du monôme x^k est la quantité

$$\varphi(k) = \min [\varphi_1(k), \ldots, \varphi_p(k)].$$

Définition. On dit qu'une série entière est d'*ordre newtonien* d si tous ses monômes sont de degré newtonien égal ou supérieur à d.

Remarquons que l'équation $\varphi(k) = 1$ définit dans l'espace $\mathbf{R}^n$ des exposants k une hypersurface Γ qui tourne sa convexité vers 0. On dit que Γ est la *diagonale du diagramme de Newton* *). En ces termes, on peut dire qu'un monôme est de degré newtonien d si et seulement si son exposant est situé sur l'hypersurface $d\Gamma$ obtenue à partir de Γ par une homothétie de rapport d. Dans le même ordre d'idées, une série est d'ordre newtonien d si les exposants de tous ses monômes sont situés sur l'hypersurface $d\Gamma$ ou bien du côté de $d\Gamma$ opposé à 0.

La somme des termes de degré (newtonien) le plus bas de la série entière sera appelée *partie principale* de la série. Par *fonction Newton-homogène de degré d*, on entend un polynôme dont tous les monômes sont de degré (newtonien) d.

On définit des notions analogues pour les champs de vecteurs. Le degré d'un monôme $x^l\partial/\partial x_i$ est

$$\varphi(l - 1_i) = \min_{1\leqslant j\leqslant p} \langle \alpha_j, l - 1_i\rangle.$$

Remarquons que pour toutes fonctions f, g et pour tout champ de vecteurs v on a les relations suivantes :

*) On définit le *polyèdre de Newton* d'une série entière comme l'enveloppe convexe de la réunion des quadrants positifs $\mathbf{R}^n_+$ ayant leurs sommets dans les exposants des monômes qui interviennent dans la série avec un coefficient non nul ; le *diagramme de Newton* est la réunion des faces compactes de ce polyèdre

ordre de $fg \geqslant$ ordre de $f +$ ordre de g,

ordre de $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i \geqslant$ ordre de $f +$ ordre de v.

Les groupes des difféomorphismes d'ordre d, les groupes des d-jets de difféomorphismes et les algèbres de Lie correspondantes sont définis comme pour les filtrations quasi homogènes. Seul le groupe des difféomorphismes quasi homogènes n'a pas son analogue pour les filtrations newtoniennes.

Définition. On dit qu'une fonction Newton-homogène f_0 de degré d *vérifie la condition A* si pour toute fonction g d'ordre $d + \delta > d$ appartenant à l'idéal engendré par les dérivées de f_0 on a un développement

$$g = \sum \frac{\partial f_0}{\partial x_i} v_i + g',$$

où le champ v est d'ordre δ et la fonction g' d'ordre supérieur à $d + \delta$.

Toute fonction quasi homogène vérifie automatiquement la condition A.

Remarque. En Algèbre, la condition A s'énonce comme suit: l'application d'espaces filtrés

$$v \to \sum \frac{\partial f_0}{\partial x_i} v_i$$

est *fidèle.*

Considérons une base de l'algèbre locale d'une fonction Newton-homogène f_0 de multiplicité finie μ.

Définition. Une base $e_1, \ldots, e_\mu$ d'éléments homogènes est dite *régulière* si pour D quelconque les éléments de base de degré D sont indépendants modulo la somme de l'idéal $I = (\partial f_0/\partial x)$ et de l'espace $A_{>D}$ des fonctions d'ordre supérieur à D.

Proposition. *Il existe toujours une base régulière. Mieux, il existe toujours une base régulière formée de monômes.*

Démonstration. Les monômes dont les exposants appartiennent à $D\Gamma$ engendrent A_D mod $A_{>D}$. Leurs images dans $A_D/((A_D \cap \cap I) + A_{>D})$ engendrent donc cet espace vectoriel, ce qui fait que ces images peuvent former une base de l'espace quotient indiqué. Les images réciproques des vecteurs choisis comme éléments de la base sont des monômes de A_D; ces monômes figureront donc dans notre base d'algèbre locale.

Pour un D suffisamment grand on a $A_D \subset I$ (puisque $\mu < \infty$). Par conséquent, la famille de monômes ainsi construite est finie. Il est clair que, par construction, chaque vecteur de A peut être représenté comme une combinaison linéaire de monômes choisis et

d'éléments de l'idéal. Enfin, si le plus petit des degrés des monômes intervenant avec un coefficient non nul dans la relation $c_1e_1 + \ldots$ $\ldots + c_\mu e_\mu \in I$ était $D < \infty$, alors les images des monômes e_i de degré D dans l'espace quotient $A_D/((A_D \cap I) + A_{>D})$ seraient dépendantes, contrairement au choix des e_i. Par conséquent, $\{e_i\}$ est une base de l'algèbre locale, ce qu'il fallait démontrer.

Le nombre d'éléments d'une base monomiale régulière caractérisés par un degré (newtonien) d'homogénéité donné est indépendant du choix de la base de l'algèbre locale. Un monôme faisant partie d'une base régulière est appelé *diagonal* (resp. *susdiagonal*) si son degré est égal (resp. supérieur) à celui de la fonction considérée f_0.

Théorème. *Supposons que la partie principale f_0 d'une fonction f vérifie la condition A et soit de multiplicité finie μ. Alors f se laisse mettre par un difféomorphisme sous la forme $f_0 + c_1e_1 + \ldots + c_se_s$, où $e_1, \ldots, e_s$ sont les monômes susdiagonaux d'une base régulière.*

La démonstration reprend mot pour mot celle du théorème du n° 12.6.

Exemple. Considérons une fonction $f_0 = x^a + \lambda x^2y^2 + y^b$, où $a \geqslant 4$, $b \geqslant 5$, $\lambda \neq 0$. Montrons que

1) $\mu = a + b + 1$;

2) *le système de monômes* $1, x, \ldots, x^{a-1}, y, \ldots, y^b$ *forme une base régulière*;

3) *la filtration définie par la ligne brisée Γ de sommets successifs en* $(a, 0), (2, 2), (0, b)$ *vérifie la condition A.*

Afin de démontrer toutes ces assertions, il est bon de faire quelques constructions géométriques sur le plan des exposants. Ces constructions réduisent l'analyse de l'algèbre locale à une suite d'opérations géométriques qui rappellent la résolution de mots croisés. La « technique des mots croisés » étant aussi applicable dans d'autres domaines, nous la décrirons avec plus de détails qu'il est nécessaire pour l'exemple envisagé.

Supposons donc que chaque dérivée partielle de la fonction donnée contienne au plus deux monômes (ce qui est évidemment le cas pour f_0). Relions par un segment les points représentatifs des exposants des monômes de la dérivée partielle par rapport à x. Un tel segment sera appelé *x-segment fondamental*. On construit de même les segments fondamentaux pour les autres variables. Dans notre exemple, les deux segments fondamentaux sont parallèles aux tronçons de la ligne brisée Γ (fig. 48).

Les segments fondamentaux représentent les relations entre les images de leurs monômes dans l'algèbre locale. Considérons les conséquences qui découlent de ces relations. On appelle *x-segment permis* tout translaté du x-segment fondamental d'un vecteur entier à composantes non négatives. Remarquons que deux segments permis

peuvent se superposer, voire se confondre géométriquement (si l'un est un x-segment et l'autre un y-segment). Ce n'est d'ailleurs pas le cas de notre exemple.

On dit que deux segments permis sont *liés* s'ils ont même extrémité. On appelle *chaîne permise* un ensemble de segments permis où tout segment est lié à tout autre par une séquence de segments permis liés consécutifs de la suite. Une chaîne permise est dite *maximale* si elle n'est pas partie d'une autre chaîne permise.

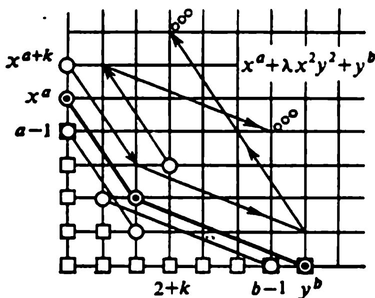


Fig. 48

On appelle *cycle* une suite finie de segments permis liés consécutifs telle que le dernier segment soit lié au premier. Le cycle est *trivial* si, en le parcourant dans le sens des x-(y-) segments, on fera autant de pas dans un sens que dans l'autre. (Dans notre exemple tous les cycles sont triviaux, mais en prenant $a = b = 4$, nous aurions aussi un cycle non trivial $(1, 3) \to (3, 1) \to (1, 3)$ formé d'un x-segment et d'un y-segment.)

Nous pouvons maintenant formuler la « règle des mots croisés » pour une fonction f qui admet un point critique de multiplicité finie :

Proposition 1. *Si l'exposant d'un monôme appartient à une chaîne permise infinie, e monôme appartient à l'idéal engendré par les dérivées partielles de la fonction.*

2. *Si tous les cycles sont triviaux, la dimension μ de l'algèbre locale est égale au nombre des chaînes maximales. On peut former une base de l'algèbre locale en choisissant un monôme quelconque de chaque chaîne maximale.*

3. *Si l'on donne en plus une filtration, on obtient une base régulière en prenant un des monômes d'ordre maximal de chaque chaîne maximale.*

La démonstration découle immédiatement des définitions.

Proposition. *Dans l'exemple $f_0 = x^a + \lambda x^2y^2 + y^b$ les chaînes permises maximales sont les suivantes :*

1) *chacun des points $1, x, \ldots, x^{a-2}, y, \ldots, y^{b-2}, xy$ admet une chaîne permise triviale ;*

2) *il existe trois chaînes permises maximales finies*

$$x^{a-1} \to xy^2, \quad x^2y \to y^{b-1}, \quad x^a \to x^2y^2 \to y^b ;$$

3) *tout autre point est origine d'une chaîne permise infinie.*

En effet, en regardant la figure 48, on voit qu'un segment permis $x^p y^q \to x^{p-1+a} y^{q-2}$ augmente l'ordre pour $q > p \geqslant 1$, et $x^p y^q \to$ $\to x^{p-2} y^{q-1+b}$ pour $p > q \geqslant 1$. Les ordres des monômes de $p = 0$, ou de $q = 0$, ou de $p = q$ augmentent après deux translations:

$$x^{a+k} \to x^{2+k} y^2 \to x^k y^{b+1},$$

$$x^{2+k} y^{2+k} \to x^{k+a-1} y^{k+b-1}.$$

Par conséquent, la chaîne permise maximale de chaque monôme, sauf ceux indiqués sous 1) et 2), contient des monômes d'ordre aussi élevé que l'on veut, ce qui signifie qu'elle est infinie.

Les monômes énumérés forment donc une base régulière et $\mu =$ $= a + b + 1$. Pour voir si la condition A est vérifiée, il suffit de calculer les ordres des coefficients des relations que nous avions construites plus haut en décrivant les chaînes permises. Ce calcul ne présentant aucune difficulté, nous l'omettrons.

Ainsi donc, il n'y a pas de monômes de base régulière situés audessus de Γ. Le théorème de la page 177 donne donc lieu au

Corollaire. *Toute fonction f de partie principale $f_0 = x^a + \lambda x^2 y^2 +$ $+ y^b$, où $\lambda \neq 0$, $a \geqslant 4$, $b \geqslant 5$, est équivalente à sa partie principale.*

Supposons que le diagramme de Newton de la fonction $f(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$ possède un point sur chaque axe de coordonnées (ce n'est pas une restriction, vu que f a un jet suffisant).

Théorème (Kushnirenko [179]). *Désignons par V le volume d'un domaine de dimension n de l'orthant positif au-dessous du diagramme de Newton, par V_i le volume de dimension $n - 1$ au-dessous du diagramme de Newton sur l'i-ième hypersurface de coordonnées, par $V_{i,j}$ le volume de dimension $n - 2$ sur le plan de coordonnées ne contenant pas l'i-ième et le j-ième vecteurs de base, et ainsi de suite. Alors pour toute fonction f ayant le diagramme de Newton donné on a*

$$\mu(f) \geqslant n!\, V - (n-1)! \sum_i V_i + (n-2)! \sum_{i<j} V_{i,j} - \ldots \pm 1,$$

l'égalité ayant lieu pour presque toute fonction f.

Par exemple, pour presque toutes les fonctions de deux variables ayant un diagramme de Newton fixé, on a $\mu = 2S - a - b + 1$, où S est l'aire du domaine au-dessous du diagramme et a, b les coordonnées des points du diagramme situés sur les axes (fig. 49).

D. Bernstein, A. Kushnirenko et A. Khovanski ont démontré des généralisations importantes de ce théorème. En particulier, *le nombre de solutions d'un système d'équations polynomiales $P_1(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n) = 0, \ldots, P_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$, où aucune coordonnée x_s n'est égale à zéro, est égal à $n!$ fois le volume de Minkowski mixte des enveloppes convexes des supports des polynômes P_s (pour presque toute famille de polynômes P_s ayant des enveloppes convexes de supports*

données). Ils ont également déduit des formules analogues exprimant d'autres invariants numériques d'intersections complètes affines au moyen de la géométrie des polyèdres. Par exemple, le nombre de formes holomorphes sur une hypersurface est égal au nombre des points entiers contenus à l'intérieur de l'enveloppe convexe du support (pour presque toutes les hypersurfaces ayant une enveloppe convexe de support donnée). Pour les détails, nous renvoyons à [59], [146], [147], [170], [158], [172], [166]. Fait remarquable que la complexité topologique en géométrie réelle (des variétés, des singularités, des applications) se définit par le nombre de monômes du système d'équations décrivant l'objet et ne dépend pas du degré des monômes (cf. [171], [156], [157]).

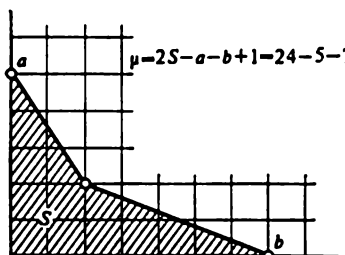


Fig. 49

§ 13. Classification des fonctions quasi homogènes

Nous décrivons les méthodes de réduction à la forme normale des fonctions quasi homogènes au moyen de difféomorphismes quasi homogènes.

13.1. Fonctions quasi homogènes de deux variables.

Proposition. *Toute fonction quasi homogène non dégénérée de deux variables x, y de corang 2 contient avec un coefficient non nul soit les monômes x^a et y^b, soit x^a et xy^b, soit x^ay et y^b, soit x^ay et y^bx.*

D é m o n s t r a t i o n. S'il en était autrement, la fonction serait divisible par x^2 ou y^2 et le point critique 0 serait non isolé.

Théorème 1. *Supposons qu'il y a sur la diagonale Γ exactement deux monômes d'une fonction quasi homogène non dégénérée de deux variables. On peut alors choisir comme base d'algèbre locale le système suivant de monômes:*

f	α_1, α_2	μ	Monômes de base x^ky^l
x^a+y^b	$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$	$(a-1)(b-1)$	$0\leqslant k\leqslant a-2$, $0\leqslant l\leqslant b-2$
x^ay+y^b	$\frac{b-1}{ab}, \frac{1}{b}$	$(a-1)b+1$	$0\leqslant k\leqslant a-2$, $0\leqslant l\leqslant b-1$; x^{a-1}
x^ay+y^bx	$\frac{b-1}{ab-1}, \frac{a-1}{ab-1}$	ab	$0\leqslant k\leqslant a-1$, $0\leqslant l\leqslant b-1$

(on peut mettre la fonction f sous la forme indiquée au tableau moyennant une dilatation et une rénumérotation des coordonnées).

D é m o n s t r a t i o n. Considérons la figure 50. Sur cette figure est hachuré le domaine des monômes qui tombent dans l'idéal (f_x, f_y). Les droites obliques en trait fin sont des chaînes permises (voir n° 12.7). On voit sur cette figure que tout monôme étranger à l'idéal peut être joint avec un monôme du tableau par un chemin permis. Cela signifie que les monômes du tableau engendrent l'algèbre locale. Or, leur nombre est égal à la dimension de l'algèbre

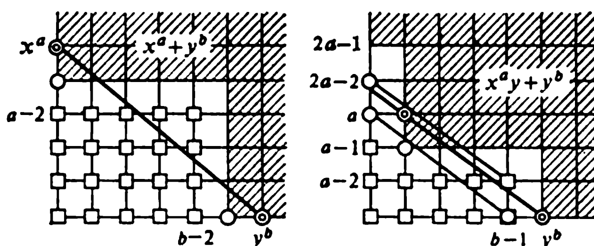


Fig. 50

locale calculée d'après la formule du n° 12.3. Par conséquent, ils forment une base, ce qu'il fallait démontrer.

Définition. On appelle *modalité interne* m_0 d'une fonction quasi homogène le nombre total des monômes de base diagonaux et susdiagonaux dans la base monomiale de l'algèbre locale.

Théorème 2. *Les fonctions quasi homogènes de deux variables de* $m_0 = 0$ *se réduisent, à l'équivalence près, à la liste suivante:*

A_k	D_k	E_6	E_7	E_8
$x^{k+1}+y^2$	x^2y+y^{k-1}	x^3+y^4	x^3+xy^3	x^3+y^5

Toutes les fonctions non dégénérées de mêmes exposants de quasi-homogénéité se laissent réduire aux formes normales indiquées dans le tableau.

Démonstration. Si la différentielle seconde n'est pas identiquement nulle, la fonction est équivalente à A_k. Si le corang de la fonction est 2, les exposants de quasi-homogénéité sont donnés par le théorème 1. On a vu au n° 12.3 que le quasi-degré du monôme de base du plus haut degré est égal à $d_{\max} = n - 2\sum\alpha_i = 2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)$. La condition $d_{\max} < 1$, équivalente à la condition $m_0 = 0$, définit sur le plan des variables (a, b) le domaine sous l'hyperbole dans chacun des trois cas du théorème 1. Les points entiers contenus dans ces domaines forment les séries A, D, E.

On comprendra peut-être mieux ce que nous venons de dire si nous remarquons que la classification des singularités avec $m_0 = 0$ se réduit à l'énumération des droites du plan qui passent au-dessous du point (2, 2), coupent les axes de coordonnées à une distance non inférieure à 2 de l'origine et contiennent un point entier d'abscisse non supérieure à 1 et un point entier d'ordonnée non supérieure à 1 dans le quadrant positif. En effet, la condition $d_{\max} < 1$ signifie que la diagonale passe au-dessous du point (2, 2). On vérifie sans peine que ces droites se réduisent à notre liste (aux changements d'appellation des axes près) et que toute fonction quasi homogène non dégénérée ayant les mêmes exposants de quasi-homogénéité que les fonctions A, D ou E se met sous la forme indiquée dans le tableau.

Remarque. La classification des singularités de corang 2 avec $m_0 = 1$ se réduit à l'énumération des droites qui, sur le plan des exposants, traversent le point (2, 2) ou passent plus haut mais restent en dessous des points (2, 3) et (3, 2).

Cette remarque est généralisée par la règle suivante qui permet de calculer la modalité interne d'une fonction de deux variables.

Menons du point (2, 2), dans le plan des exposants, un rayon horizontal et un rayon vertical dans le sens des valeurs croissantes des exposants et considérons le polygone limité par les portions de ces rayons et la ligne brisée de Newton.

La modalité serait égale *au nombre des points situés à l'intérieur et sur les frontières du polygone* pour les fonctions non Γ-dégénérées caractérisées par le diagramme de Newton Γ donné. (Une fonction est *non Γ-dégénérée* si la multiplicité μ prend la plus petite valeur possible pour Γ donné.)

A. Kushnirenko a montré [179] que *la modalité interne d'une fonction non Γ-dégénérée* (le nombre des monômes de base de la base régulière situés sur Γ et au-dessus) *est effectivement égale au nombre des points entiers dans le polygone indiqué.*

13.2. Fonctions quasi homogènes de trois variables. Les fonctions quasi homogènes non dégénérées de trois variables se répartissent en sept classes (non disjointes).

Proposition (voir [18]). *Toute fonction quasi homogène non dégénérée de degré 1 de trois variables de corang 3 contient avec un coefficient non nul (quitte à rénuméroter les variables si nécessaire) au moins une des sept suites de monômes énumérés au tableau suivant:*

Classe	Monômes	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	μ
I	$x^a,\ y^b,\ z^c$	$\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}$	$(a-1)(b-1)(c-1)$
II	$x^a,\ y^b,\ z^c y$	$\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{b-1}{bc}$	$(a-1)(bc-b+1)$
III	$x^a,\ y^b x,\ z^c x$	$\frac{1}{a},\ \frac{a-1}{ab},\ \frac{a-1}{ac}$	$\frac{(ab-a+1)(ac-a+1)}{a-1}$
IV	$x^a,\ y^b z,\ z^c y$	$\frac{1}{a},\ \frac{c-1}{bc-1},\ \frac{b-1}{bc-1}$	$(a-1)bc$
V	$x^a,\ y^b z,\ z^c x$	$\frac{1}{a},\ \frac{ac-a+1}{abc},\ \frac{a-1}{ac}$	$ac(b-1)+a-1$
VI	$x^a y,\ y^b x,\ z^c x$	$\frac{b-1}{ab-1},\ \frac{a-1}{ab-1},\ \frac{(a-1)b}{(ab-1)c}$	$\frac{a(abc-c-ab+b)}{a-1}$
VII	$x^a y,\ y^b z,\ z^c x$	$\frac{bc-c+1}{abc+1},\ \frac{ac-a+1}{abc+1},\ \frac{ab-b+1}{abc+1}$	abc

D é m o n s t r a t i o n. Le début de classification passe pour n'importe quel nombre de variables $x_1, \ldots, x_n$. Fixons un numéro i. En l'absence de monômes de la forme $x_i^a x_j$, l'axe des x_i est entièrement constitué de points critiques. On trouve donc sûrement dans l'espace des exposants, à une distance non supérieure à 1 de chaque axe de coordonnée, l'exposant du monôme présent. Choisissant un

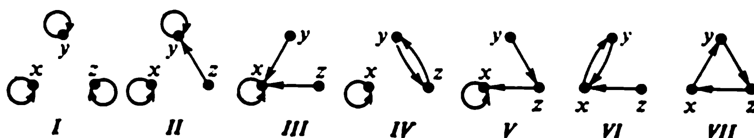


Fig. 51

monôme au voisinage de chaque axe (ce qui est possible, car la différentielle seconde est identiquement nulle), nous obtenons une application $i \mapsto j$ de l'ensemble des axes de coordonnées dans lui-même. Il s'agit donc de classifier les applications d'un ensemble fini dans lui-même. Pour $n = 3$ c'est facile: un ensemble de trois points admet sept endomorphismes (non réduisibles l'un à l'autre

par une rénumérotation de points) (fig. 51), ce qui donne précisément les sept classes du tableau.

Proposition. 1) *Une fonction quasi homogène non dégénérée de classe* III *existe si et seulement si le plus petit commun multiple* $[b, c]$ *des nombres* b *et* c *est divisible par* $a - 1$.

2) *Une fonction quasi homogène non dégénérée de classe* VI *existe si et seulement si la quantité* $(b - 1)\, c$ *est divisible par le produit de* $a - 1$ *et du plus grand commun diviseur* (b, c) *des nombres* b *et* c.

3) *Les fonctions quasi homogènes non dégénérées des cinq autres classes existent quels que soient* a, b, c.

Démonstration. Pour démontrer 3), il suffit d'additionner les monômes du tableau. Pour démontrer 1) et 2), remarquons qu'une fonction quasi homogène de classe III ou VI ne contenant aucun monôme de la forme $y^p z^q$ $(p \geqslant 0,\ q \geqslant 0)$ est dégénérée. En effet, l'ensemble de niveau nul a alors deux composantes (dont l'une est le plan $x = 0$). Il s'ensuit que le point critique est non isolé (l'ensemble des points critiques contient la ligne d'intersection des composantes): la fonction est dégénérée.

Réciproquement, on vérifie sans peine qu'une fonction quasi homogène de classe III

$$x^a + xy^b + xz^c + \varepsilon y^p z^q$$

ou de classe VI

$$x^a y + y^b x + z^c x + \varepsilon y^p z^q$$

est non dégénérée pour presque tout ε.

Il reste à montrer qu'un monôme diagonal de la forme $y^p z^q$ existe exactement pour les conditions de divisibilité indiquées ci-dessus.

Dans le cas III le quasi-degré du monôme $y^p z^q$ est égal à $(pc + qb)(a - 1)/abc$. Le monôme $y^p z^q$ est diagonal si et seulement si le degré en question est égal à 1, i.e. si $(pc + qb)(a - 1) = (a - 1)\, bc + bc$. Par conséquent, bc se divise par $a - 1$ et le quotient (égal à $pc + qb - bc$) se divise par (b, c). Autrement dit, bc est divisible par le produit $(a - 1)(b, c)$, i.e. $[b, c]$ est divisible par $a - 1$.

Réciproquement, soit $[b, c]$ multiple de $a - 1$. Alors la quantité $\frac{abc}{a-1} = bc + \frac{bc}{a-1}$ est un entier divisible par (b, c). Or, tout entier supérieur à bc et multiple de (b, c) se laisse représenter sous la forme $pc + qb$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ *). Donc $abc/(a - 1) = pc + qb$, et le monôme $y^p z^q$ est diagonal.

---

*) En effet, la droite $\{p, q\colon pc + qb = bc\}$ admet au moins deux points entiers (les points $(b, 0)$ et $(0, c)$) dans le quadrant $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$. Sur une droite parallèle $pc + qb = m > bc$ la distance séparant les points entiers est la même. Donc déjà pour $m \geqslant (b - 1)(c - 1)$ le segment de la droite $pc + qb = m$ contenu dans le même quadrant possède un point entier.

Dans le cas VI la condition de diagonalité s'écrit

$$(a-1)(pc+qb)=(a-1)bc+(b-1)c.$$

Donc $(b-1)c$ se divise par le produit $(a-1)(b, c)$. Réciproquement, si $(b-1)c$ est divisible par $(a-1)(b, c)$, alors $bc+$ $+\frac{(b-1)c}{a-1}$ se laisse représenter sous la forme $pc+qb$, $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Un exemple de fonction non dégénérée de classe III : x^7+xy^3+ $+xz^4+\varepsilon x^3y^2$, de classe VI : $x^5y+xy^3+xz^4+\varepsilon x^3y^2$.

Remarque. Nos résultats nous permettent d'énumérer facilement toutes les singularités (semi-) quasi homogènes de modalité interne $m_0=0$ ou 1 (voir [18]). Des listes obtenues on voit que la modalité interne coïncide dans ces cas avec la modalité ordinaire. A. Kushnirenko et A. Gabriélov ont montré [103] que les modalités m et m_0 coïncident pour les fonctions (semi-)homogènes. La modalité interne m_0 n'est pas supérieure à la modalité ordinaire, $m_0\leqslant m$. A. Varchenko [301] a montré que $m_0=m$ pour toutes les fonctions (semi-) quasi homogènes.

13.3. Formes normales des fonctions semi-quasi homogènes. Pour mettre les fonctions quasi homogènes sous forme normale, on doit classifier les orbites de l'action du groupe des difféomorphismes quasi homogènes sur les espaces de fonctions quasi homogènes. Les calculs s'appuient sur deux théorèmes généraux des fonctions quasi homogènes (théorèmes A et B ci-après). Avant de formuler ces théorèmes, introduisons quelques définitions et notations.

Soit $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une suite de nombres rationnels positifs définissant le type de quasi-homogénéité dans un espace $\mathbf{C}^n$ muni de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ fixes.

L'algèbre de Lie du groupe des difféomorphismes quasi homogènes s'appelle *algèbre quasi homogène* et se note $\mathfrak{a}(\alpha)$. Par exemple, $\mathfrak{a}(1, 1)=\mathfrak{gl}(2, \mathbf{C})$.

Définition. On appelle *support des fonctions quasi homogènes de degré d de type α* l'ensemble de tous les points entiers non négatifs m sur l'hyperplan $(m, \alpha)=d$. On dit que le support est *complet* s'il n'appartient pas à un sous-espace affine de dimension inférieure à $n-1$ de $\mathbf{C}^n$.

On peut considérer les fonctions quasi homogènes comme des fonctions définies sur le support ($\sum a_m x^m$ prend en m la valeur a_m). L'ensemble de ces fonctions est l'espace vectoriel $\mathbf{C}^\nu$, où ν est le nombre des points du support. Le groupe des difféomorphismes quasi homogènes et l'algèbre quasi homogène $\mathfrak{a}(\alpha)$ opèrent sur $\mathbf{C}^\nu$. Il ressort immédiatement des définitions que *l'algèbre de Lie* $\mathfrak{a}(\alpha)$ *est*

engendrée comme espace **C**-*vectoriel par tous les champs monomiaux* $x^p\partial_i$ *pour lesquels* $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_i$ (ici et dans le texte qui suit $\partial_i = \partial/\partial x_i$). Par exemple, n monômes $x_i\partial_i$ appartiennent à $\mathfrak{a}$ (α) pour α quelconque.

Définition. On appelle *racines* de l'algèbre quasi homogène $\mathfrak{a}$ (α) tous les vecteurs non nuls $\boldsymbol{m}$ de l'espace des exposants situés dans le plan $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ et ayant la forme $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{1}_i$, où $\boldsymbol{1}_i$ est un vecteur dont l'unique composante non nulle est son i-ième composante égale à 1, et le vecteur $\boldsymbol{p}$ n'a que des composantes entières non négatives.

Autrement dit, $\boldsymbol{m}$ est une racine si $x^p\partial_i$ est un champ monomial de $\mathfrak{a}$ (α) différent de $x_i\partial_i$.

Remarquons que i se laisse reconstituer d'après la racine $\boldsymbol{m}$, car le vecteur $\boldsymbol{m}$ a exactement une coordonnée négative $m_i = -1$ (les composantes de $\boldsymbol{m}$ ne peuvent pas être toutes non négatives, car $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$).

Théorème A (voir [13]). *Supposons que le support soit complet. Alors l'action de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{a}$ (α) *sur l'espace des fonctions définies sur le support se reconstruit sans ambiguïté par la classe d'équivalence affine du couple support — système des racines.*

Théorème B (voir [16]). *L'algèbre de Lie quasi homogène* $\mathfrak{a}$ (α) *se définit par son système des racines (considéré comme sous-ensemble de l'espace vectoriel engendré par les racines) et par sa dimension, à un nombre fini de variantes près.*

Autrement dit, en identifiant les algèbres qui se déduisent l'une de l'autre par addition directe d'une algèbre triviale (commutative), on peut dire qu'*il existe un nombre fini d'algèbres de Lie* $\mathfrak{a}$ (α) *non isomorphes ayant des systèmes de racines linéairement équivalents.*

Pour les exemples envisagés, ce nombre fini est 1.

Remarques. Les équivalences affines des supports et les équivalences linéaires des systèmes des racines dans les théorèmes A et B n'envoient pas forcément sur lui-même ni le simplexe des coordonnées $m_i \geqslant 0$ sur le plan $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\alpha}) = d$, ni le réseau des $\boldsymbol{m}$ entiers non négatifs dans $\mathbf{C}^n$. Les groupes des difféomorphismes quasi homogènes et leurs orbites dans les espaces de fonctions quasi homogènes ne coïncident pas forcément dans les conditions des théorèmes A et B, mais les composantes connexes des orbites coïncident.

13.4. Démonstration du théorème B. Soit $M \subset \mathbf{C}^r \subset \mathbf{C}^n$ le système des racines de l'algèbre $\mathfrak{a}$ (α) qui engendre un plan $\mathbf{C}^r$ dans $\mathbf{C}^n$ $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$. Associons à chaque racine $\boldsymbol{m} \in M$ un vecteur de base e_m dans $\mathbf{C}^\nu$ (où ν est le nombre des racines). Considérons l'espa-

ce vectoriel $H = \mathrm{Hom}\,(\mathbf{C}^r, \mathbf{C})$ de dimension r et la somme directe $\mathfrak{b} = H \oplus \mathbf{C}^\nu$.

Lemme. *On peut munir l'espace* $\mathfrak{b} = H \oplus \mathbf{C}^\nu$ *d'une structure d'algèbre de Lie suivante:*

(1) $[h_1, h_2] = 0 \quad (\forall h_1, h_2 \in H)$;

(2) $[h, e_m] = (h, m)\, e_m \quad (\forall h \in H, m \in M)$;

(3) $[e_{m_1}, e_{m_2}] = N_{m_1, m_2} e_{m_1+m_2}$, où $m_1 + m_2 \neq 0$,

$$N_{m_1, m_2} = \begin{cases} 0 \text{ si } m_1 + m_2 \text{ n'est pas racine;} \\ -\max\{\lambda : m_1 + \lambda m_2 \text{ est racine}\} \text{ si ce maximum est} > 1; \\ +\max\{\lambda : m_2 + \lambda m_1 \text{ est racine}\} \text{ si ce maximum est} > 1; \\ \pm 1 \text{ si les deux maxima} = 1 \text{ (le cas des deux maxima} > 1 \\ \text{est impossible);} \end{cases}$$

(4) $[e_m, e_{-m}] = h_m$, *où la fonction* $h_m \in H$ *normée par la condition* $h_m(m) = 2$ *change de signe par la réflexion de* $\mathbf{C}^r$ *conservant* M *et envoyant* m *sur* $-m$ *(une telle réflexion existe et est unique pour toute paire de racines opposées).*

L'algèbre de Lie quasi homogène $\mathfrak{a}(\alpha)$ *est isomorphe à la somme directe d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{b}$ *(obtenue pour un choix déterminé des signes* $\pm$ *dans* (3)) *et d'une algèbre triviale (commutative):*

$$\mathfrak{a}(\alpha) \cong \mathfrak{b} \oplus \mathbf{C}^{n-r}.$$

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. Considérons la base monomiale de $\mathfrak{a}(\alpha)$ sur $\mathbf{C}$. Désignons les monômes de base par

$$h_i = x_i \partial_i, \quad e_m = x^m x_i \partial_i$$

(i est défini d'une façon unique par la racine m). Montrons que ces générateurs vérifient les relations de commutation (1) à (4).

Considérons les dérivations h_i et e_m comme des opérateurs linéaires dans l'espace de toutes les fonctions sur le réseau $\mathbf{Z}^n$ dans l'espace (complexifié) d'exposants $\mathbf{C}^n$. Alors h_i est l'opérateur de multiplication par l'i-ième coordonnée. L'opérateur de multiplication par une fonction sera noté comme la fonction elle-même. Ainsi donc,

$$(ha)(k) = h(k)\, a(k), \quad k \in \mathbf{Z}^n, \quad a: \mathbf{Z}^n \to \mathbf{C}.$$

La relation (1) est démontrée, car les multiplications par des fonctions sont permutables.

Désignons par σ_m l'action exercée sur les fonctions par une translation de $\mathbf{C}^n$ égale à $m \in \mathbf{Z}^n$:

$$(\sigma_m a)(k) = a(k - m), \quad k \in \mathbf{Z}^n, \quad a: \mathbf{Z}^n \to \mathbf{C}.$$

Alors $e_m = \sigma_m h_i$. Calculons le commutateur de la multiplication par une fonction linéaire et de la translation:

$$[h, \sigma_m] = h(m)\, \sigma_m.$$

La relation (2) est démontrée. Calculons ensuite le commutateur de e_{m_1} et e_{m_2}:

$$e_{m_1}e_{m_2} = \sigma_{m_1}h_{i_1}\sigma_{m_2}h_{i_2} = \sigma_{m_1}\sigma_{m_2}(h_{i_1}h_{i_2} + h_{i_1}(m_2)\,h_{i_2}),$$
$$[e_{m_1}, e_{m_2}] = \sigma_{m_1+m_2}(h_{i_1}(m_2)\,h_{i_2} - h_{i_2}(m_1)\,h_{i_1}).$$

Si $m_1 + m_2$ n'est pas une racine et est non nul, l'opérateur de droite ne peut appartenir à $\mathfrak{a}(\alpha)$ que s'il est nul, auquel cas $[e_{m_1}, e_{m_2}] = 0$.

Si $m_1 + m_2$ est une racine, alors ce vecteur possède exactement une composante négative, égale à -1. Les vecteurs m_1 et m_2 ont aussi une composante négative chacun ; cette composante est égale à -1. De ce fait, la composante négative de $m_1 + m_2$ est ou bien celle de m_1, ou bien celle de m_2. Supposons pour fixer les idées que la composante négative de $m_1 + m_2$ soit celle de m_1. Alors les composantes d'indices i_1, i_2 des vecteurs m_1, m_2 et $m_1 + \lambda m_2$ sont de la forme

	m_1	m_2	m_1+m_2	$m_1+\lambda m_2$
h_{i_1}	-1	0	-1	-1
h_{i_2}	$p>0$	-1	$p-1\geqslant 0$	$p-\lambda$

Il s'ensuit que $m_1 + \lambda m_2$ est racine pour $\lambda \leqslant p = h_{i_2}(m_1)$, i.e. $h_{i_2}(m_1) = \max\,\{\lambda\colon m_1 + \lambda m_2 \text{ est racine}\}$.

Donc, pour $h_{i_1}(m_1 + m_2) = -1$ on a

$$[e_{m_1}, e_{m_2}] = -h_{i_2}(m_1)\,\sigma_{m_1+m_2}h_{i_1} = N_{m_1,m_2}e_{m_1+m_2},$$

où $N_{m_1,m_2} = -h_{i_2}(m_1)$; la relation (3) est démontrée.

Soient m et $-m$ des racines. Chacun de ces deux vecteurs a exactement une composante négative, égale à -1, si bien que $e_m = x_i\partial_j$ et $e_{-m} = x_j\partial_i$. Donc les poids α_i et α_j sont égaux. La permutation des coordonnées i, j dans $\mathbf{C}^n$ est une réflexion qui renvoie le système de toutes les racines dans lui-même en permutant m et $-m$. Ensuite, $[e_m, e_{-m}] = h_i - h_j$. Si l'on considère $h_m = h_i - h_j$ comme une fonction dans $\mathbf{C}^n$, elle change de signe par la réflexion permutant i et j et prend la valeur $+2$ sur le vecteur m. Par conséquent, les opérateurs h, e_m vérifient les relations (1) à (4).

Considérons maintenant le sous-espace $\mathbf{C}^r$ engendré par les racines dans l'espace de coordonnées $\mathbf{C}^n$ muni de la métrique hermitienne standard $\langle k, l\rangle = \sum k_i\bar{l}_i$. L'espace $\mathbf{C}^r$ et la métrique sont invariants par toute permutation des coordonnées de poids égaux ($\alpha_i = \alpha_j$). Le complémentaire orthogonal $\mathbf{C}^{n-r}$ de $\mathbf{C}^r$ dans $\mathbf{C}^n$ est

donc invariant lui aussi. Représentons l'espace vectoriel de l'algèbre $\mathfrak{a}(\alpha)$ sous la forme $\mathfrak{a}(\alpha) = H^r \oplus K^\nu \oplus H^{n-r}$, où H^r est composé de fonctions linéaires h de $\mathbf{C}^n$ qui s'annulent sur $\mathbf{C}^{n-r}$; H^{n-r} est composé de fonctions linéaires h de $\mathbf{C}^n$ qui s'annulent sur $\mathbf{C}^r$; K^ν se compose de combinaisons linéaires des vecteurs e_m.

Des relations de commutation démontrées il ressort que H^{n-r} appartient au centre de l'algèbre $\mathfrak{a}(\alpha)$ et que $H^r \oplus K^\nu$ est un idéal isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{b}$. Par conséquent, $\mathfrak{a}(\alpha) \cong \mathfrak{b} \oplus H^{n-r}$, et le lemme est démontré.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème B. En effet, les relations (1) à (4) expriment les commutateurs dans les algèbres $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}$ à l'aide des propriétés géométriques des racines, sans faire intervenir les coordonnées (sauf pour le choix du signe $\pm$ dans l'une des relations (3)). Il s'ensuit que la collection des racines considérées comme vecteurs dans l'espace C-vectoriel $\mathbf{C}^r$ définit l'algèbre à un nombre fini de possibilités près, ce qui démontre le théorème B.

Remarque. On ignore si, pour des choix différents du signe dans (3), on peut obtenir des algèbres non isomorphes.

13.5. Démonstration du théorème A. Faisons le prolongement des fonctions sur le support au réseau $\mathbf{Z}^{n-1}$ de tous les points entiers dans le plan du support en leur donnant la valeur 0 en dehors du support. Les opérateurs h_i, e_m, σ_m, h_m définis dans la démonstration du théorème B dans l'espace des fonctions sur le réseau $\mathbf{Z}^n$ agissent tout aussi bien dans l'espace des fonctions sur le réseau $\mathbf{Z}^{n-1}$ dans le plan du support. Les opérateurs obtenus dans l'espace des fonctions sur $\mathbf{Z}^{n-1}$ seront désignés par les mêmes symboles. Alors h_i, h_m sont les opérateurs de multiplication par des fonctions affines dans le plan du support, σ_m l'opérateur de translation défini par la racine $\boldsymbol{m}$ et $e_m = \sigma_m h_i$.

Soit $\boldsymbol{m}$ une racine. On dit qu'un point $\boldsymbol{k}$ du support est un *point de base* pour $\boldsymbol{m}$ si le point $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{m}$ n'appartient pas au support. L'ensemble de tous les points de base pour $\boldsymbol{m}$ est appelé *la base de* $\boldsymbol{m}$ (dans le support donné).

La base de la racine $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{p} - \mathbf{1}_i$ est constituée de tous les points du support en lesquels l'i-ième coordonnée est égale à 0. Par conséquent, la base est contenue tout entière dans un hyperplan affine unique $\mathbf{C}^{n-2}$ dans le plan du support.

La base de toute racine du support complet appartient exactement à un hyperplan affine $\mathbf{C}^{n-2} \subset \mathbf{C}^{n-1}$. En effet, tout point du support s'obtient du point correspondant de base en retranchant un entier non négatif multiple de $\boldsymbol{m}$; donc, si la base était contenue dans $\mathbf{C}^{n-3}$, le support serait contenu dans $\mathbf{C}^{n-2}$ et ne serait pas complet. Il existe donc une et une seule fonction affine dans le plan du support telle

que sa valeur sur la base de m soit 0 et que son accroissement le long de m soit -1. Cette fonction est h_i (restriction au plan du support). Par conséquent, la restriction de h_i au plan du support se laisse reconstituer sans ambiguïté en fonction du support et de la racine m.

Maintenant il est possible de décrire l'action de e_m dans l'espace des fonctions sur le support uniquement à l'aide des propriétés géométriques du support et des racines: $e_m = \sigma_m h_i$, i.e. $(e_m a)(k) = h_i(k-m)\, a(k-m)$ pour toute fonction a. Remarquons que e_m laisse invariant l'espace des fonctions nulles en dehors du support, car $h_i = 0$ en tout point de base.

L'algèbre $\mathfrak{a}(\alpha)$ opérant dans l'espace des fonctions sur un réseau dans le plan du support, on obtient une représentation $\varphi: \mathfrak{a}(\alpha) \to \mathscr{E}$, où $\mathscr{E}$ est l'algèbre des endomorphismes de cet espace de fonctions (de dimension infinie). Considérons l'image de φ. *Cette image se définit par la géométrie du support et des racines.* Plus exactement, soient $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}(\alpha_1)$, $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}(\alpha_2)$ deux algèbres quasi homogènes, et soient $S_1 \subset \mathbf{C}_1^{n-1}$, $S_2 \subset \mathbf{C}_2^{n-1}$ deux supports complets. Soit $\psi: \mathbf{C}_1^{n-1} \to \mathbf{C}_2^{n-1}$ une application affine envoyant bijectivement S_1 dans S_2 et le système des racines pour $\mathfrak{a}_1$ dans le système des racines pour $\mathfrak{a}_2$. Alors *l'isomorphisme* ψ^*, *induit par* ψ, *de l'espace des fonctions sur* $\mathbf{C}_2^{n-1}$ *dans l'espace des fonctions sur* $\mathbf{C}_1^{n-1}$ *envoie l'algèbre de Lie* $\varphi(\mathfrak{a}_2)$ *isomorphiquement sur l'algèbre de Lie* $\varphi(\mathfrak{a}_1)$.

En effet, l'algèbre $\mathfrak{a}(\alpha)$ est engendrée sur $\mathbf{C}$ par les monômes $x_i\partial_i$ et $x^m x_i \partial_{i(m)}$. Les images des champs $\sum c_i x_i \partial_i$ dans $\mathscr{E}$ sont des opérateurs de multiplication par toutes les fonctions affines possibles dans le plan du support. Les images des champs $x^m x_i \partial_{i(m)}$ sont des opérateurs e_m définis par la géométrie du support et des racines. Donc $\psi^* e_{\psi(m)} = e_m \psi^*$, si bien que ψ induit un isomorphisme $\Psi: \varphi(\mathfrak{a}_2) \to \varphi(\mathfrak{a}_1)$.

Le noyau de l'homomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{a}(\alpha) \to \mathscr{E}$ *est* 0.

En effet, soit $(h + \sum c_m e_m)\, a = 0$ pour toute fonction a. Choisissons un point k où tous les h_{i_m} sont nuls et appliquons $h + \sum c_m e_m$ à une fonction δ_k qui ne prend la valeur 1 qu'en k. Il vient $h(k)\,\delta_k + \sum c_m h_{i_m}(k)\,\delta_{k+m} = 0$, d'où $c_m = 0$ et $h(k) = 0$. Donc $h \equiv 0$. Il s'ensuit que l'algèbre de Lie $\varphi\mathfrak{a}(\alpha)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{a}(\alpha)$.

Les isomorphismes $\mathfrak{a}_2 \to \varphi(\mathfrak{a}_2) \xrightarrow{\Psi} \varphi(\mathfrak{a}_1) \to \mathfrak{a}_1$ montrent que les algèbres de Lie $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ ainsi que leurs actions sur les espaces de fonctions sur S_1 et S_2 sont isomorphes. Le théorème A est démontré.

Corollaire 1. *Soient un ensemble de poids* α *et un degré* d *tels qu'il existe une fonction quasi homogène à point critique* 0 *isolé de 2-jet nul. Alors le système des racines et le support définissent sans ambiguïté l'algèbre de Lie* $\mathfrak{a}(\alpha)$ *et son action* φ.

Démonstration. Sous les hypothèses faites le support est complet. En effet, puisque le point critique est isolé, il existe

pour tout i un monôme de la forme $x_i^{a_i} x_{j(i)}$ ($j \in \{1, \ldots, n\}$ et, par hypothèse, $a_i > 1$). Montrons que les exposants de ces n monômes appartenant au support sont linéairement indépendants. Pour $a_i > 1$, le système d'équations $z_{j(i)} + a_i z_i$ par rapport à z n'admet qu'une solution nulle (on le voit sans peine en considérant les cycles de l'endomorphisme d'un ensemble fini, $i \mapsto j$). Il s'ensuit que le déterminant de la matrice de ce système est distinct de 0, d'où il ressort que le support est complet. Le corollaire résulte alors du théorème A.

Corollaire 2. *Soit* $\gamma: \mathbf{C}_1^{n-1} \to \mathbf{C}_2^{n-1}$ *un isomorphisme affine du plan d'un support complet* S_1 *dans le plan d'un support complet* S_2, *qui envoie* S_1 *sur une partie de* S_2, *les racines de l'algèbre* $\mathfrak{a}_1$ *sur une partie des racines de l'algèbre* $\mathfrak{a}_2$ *et les bases des racines de* $\mathfrak{a}_1$ *sur une partie des bases des racines correspondantes de* $\mathfrak{a}_2$. *Alors* γ *induit un isomorphisme de l'action* φ *de* $\mathfrak{a}_1$ *sur les fonctions de* S_1 *et de l'action d'une sous-algèbre de* $\mathfrak{a}_2$ *sur l'espace des fonctions sur* S_2 *qui s'annulent en dehors de* $\gamma(S_1)$.

Démonstration. La sous-algèbre indiquée est engendrée sur $\mathbf{C}$ par les opérateurs h de multiplication par toutes les fonctions affines, et par les opérateurs e_m, où m est image d'une racine de la première algèbre. Les actions des e_m sont définies par les racines et les bases et, pour cette raison, commutent à l'action de γ.

Corollaire 3. *Dans les conditions du corollaire 2, choisissons quelques points de* S_1 *et fixons les valeurs que les fonctions prennent en ces points. Toutes les fonctions sur* S_1 *avec des valeurs fixées en ces points forment un plan affine* P *dans l'espace des fonctions sur* S_1. *Soit* $\mathfrak{a}_p$ *une algèbre stationnaire de ce plan* P. *Alors l'isomorphisme* γ *défini dans le corollaire 2 induit un isomorphisme entre l'action de* $\mathfrak{a}_p$ *sur* P *et celle d'une sous-algèbre de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{a}_2$ *qui conserve le plan* $\gamma^{-1*}P$ *dans l'espace des fonctions sur* S_2.

Démonstration. L'application de la première action dans la seconde commute à γ^{-1*}, ce qu'il fallait démontrer.

13.6. Exemple. Supposons qu'en faisant tourner la règle (plan) de Newton autour de la droite passant par les exposants des monômes du binôme $\varphi = x^2z + yz^2$, on s'arrête sur un plan qui passe par l'exposant du monôme y^{4k+1}. A quelle forme peut-on réduire, par des difféomorphismes quasi homogènes, la fonction quasi homogène $\varphi + \ldots$ ainsi obtenue?

Calculons le type α et le degré d; il vient $\alpha = (2k + 1, 2, 4k)$, $d = 8k + 2$. Les monômes du support sont x^2z, yz^2, x^2y^{2k}, $y^{2k+1}z$, y^{4k+1}.

Le support est affinement équivalent à un sous-ensemble du support de la forme cubique homogène formé par les exposants des monômes XYZ, YZ^2, XY^2, Y^2Z, Y^3 (fig. 52). Le seul champ-racine

est $y^{2k}\partial/\partial z$. Son image dans le support des formes homogènes est $Y\partial/\partial Z$.

Considérons, dans l'espace des fonctions sur le support quasi homogène, le plan formé par les fonctions prenant la valeur 1 dans les points qui correspondent aux monômes x^2z et yz^2. Considérons le

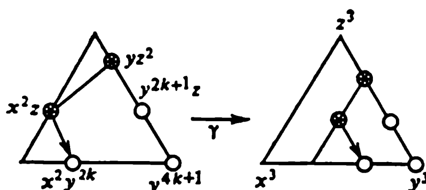


Fig. 52

stabilisateur de ce plan dans le groupe des difféomorphismes quasi homogènes.

Les orbites de la composante de l'unité de ce stabilisateur sont envoyées par l'application des supports dans les orbites du groupe correspondant des transformations linéaires (corollaire 3).

L'algèbre de Lie du groupe linéaire ainsi obtenu se laisse décrire sans peine: elle est engendrée par la partie torique opérant sur les

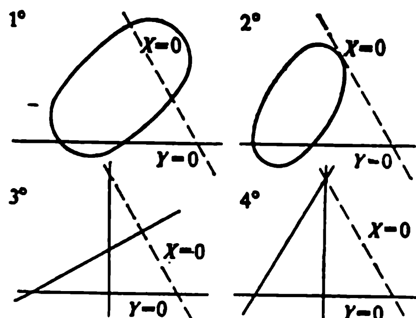


Fig. 53

fonctions définies sur le support comme des multiplications par les fonctions affines nulles aux points * du support (où est fixée la valeur 1 de la fonction), et par l'image du vecteur racine.

Tout revient donc à classifier les polynômes $XYZ + YZ^2 + AXY^2 + BY^2Z + CY^3$ par rapport aux changements de variables $Z = Z' + \lambda Y'$ et $X = \gamma X'$, $Y = \gamma^{-2}Y'$, $Z = \gamma Z'$. Ce problème est équivalent à la classification affine des courbes cubiques planes réductibles (à composante $Y = 0$) qui admettent au moins deux points doubles ($Y = 0$, $XZ + Z^2 = 0$) à distance finie ($X \neq 0$).

Suivant que la cubique se décompose en trois droites ou en une droite plus une conique, et suivant qu'il y a ou non contact à l'infini, quatre cas sont à distinguer (fig. 53), auxquels correspondent les formes normales

1) $XYZ + YZ^2 + bY^2Z + Y^3$, $b^2 \neq 4$;
2) $XYZ + YZ^2 + XY^2$;
3) $XYZ + YZ^2 + Y^2Z$;
4) $XYZ + YZ^2$.

Voici la liste définitive des formes normales quasi homogènes:

1) $\varphi + bzy^{2k+1} + y^{4k+1}$, $b^2 \neq 4$;
2) $\varphi + x^2y^{2k}$;
3) $\varphi + zy^{2k+1}$;
4) φ.

§ 14. Suites spectrales et réduction aux formes normales

La méthode de réduction aux formes normales qui sera exposée dans ce paragraphe est basée sur une suite spectrale construite d'après la filtration du complexe de Koszul défini par les dérivées partielles de la fonction considérée. Nous n'utilisons explicitement aucune propriété des suites spectrales ou des complexes de Koszul mais faisons directement toutes les démonstrations nécessaires pour les calculs pratiques. Pour le rapport entre nos constructions et les constructions algébriques traditionnelles, voir [20].

14.1. Construction des approximations successives. Soit f une série dans $A = \mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$. Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}$ des champs vectoriels formels $a = \sum a_s\partial/\partial x_s$. Soit $\partial: \mathfrak{A} \to A$ une application de A-modules telle que $\partial a = \sum a_s\partial f/\partial x_s$.

Notons:

$I_f = \operatorname{Im} \partial$, idéal gradient pour f,
$S_f = \operatorname{Ker} \partial$, algèbre stationnaire pour f,
$Q_f = A/I_f$, algèbre locale pour f.

Nous allons décrire une méthode d'approximations successives pour le calcul de S_f et Q_f. Donnons-nous un type de quasi-homogénéité $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, où tous les poids α_s sont des entiers naturels. Les filtrations induites dans A et dans $\mathfrak{A}$ (voir § 12) seront dénotées par

$$A = A_0 \supset A_1 \supset \ldots, \quad \mathfrak{A} \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_{-1} \supset \mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \ldots,$$

où $\mathfrak{A}_d = \{a \in \mathfrak{A} : aA_p \subset A_{p+d} \ \forall\, p\}$.

Soit $f \in A_N$, alors $\partial\mathfrak{A}_0 \subset A_N$. Nous désignerons $\mathfrak{A}_0$ par $\mathfrak{A}^+$ et A_N par A^+. La restriction de ∂ à $\mathfrak{A}^+$ définit une application de A-modules $\partial^+: \mathfrak{A}^+ \to A^+$. Notons aussi:

$I_f^+ = \operatorname{Im} \partial^+$, idéal gradient supérieur pour f,
$S_f^+ = \operatorname{Ker} \partial^+$, algèbre stationnaire supérieure pour f,
$Q_f^+ = A^+/I_f^+$, algèbre locale supérieure pour f.

Vu les constructions qui vont suivre, il est commode de déterminer les filtrations dans les A-modules $\mathfrak{A}^+$, A^+ comme suit:

$$\mathfrak{a}_p = \mathfrak{A}_p \quad \text{pour } p \geqslant 0,$$
$$\mathfrak{a}_p = \mathfrak{A}_0 \quad \text{pour } p \leqslant 0,$$
$$\mathcal{A}_p = A_{N+p} \text{ pour } p \geqslant 0,$$
$$\mathcal{A}_p = A_N \quad \text{pour } p \leqslant 0.$$

L'application ∂^+ respecte ces filtrations:

$$\partial^+ \mathfrak{a}_p \subset \mathcal{A}_p.$$

Remarque. Nos approximations successives sont la suite spectrale d'un complexe filtré dont la différentielle se définit par la suite

$$0 \to \mathfrak{A}^+ \xrightarrow{\partial^+} A^+ \to 0.$$

Soient $r \geqslant 0$, $p \geqslant 0$. Identifions les espaces quotients $S_p^0 = \mathfrak{a}_p/\mathfrak{A}_{p+1}$, $A_p^0 = \mathcal{A}_p/\mathcal{A}_{p+1}$ avec les espaces de champs de vecteurs quasi homogènes de degré p et de polynômes de degré $N + p$ respectivement. Les espaces S_j^0 et A_j^0 sont les approximations « nulles » des « p-composantes » dans les A-modules S_j^+ et Q_j^+ respectivement. Les approximations suivantes S_p^r, A_p^r seront définies dans le texte qui suit.

Soit $f = f_0 + f_1 + \ldots$ la décomposition de la série en composantes quasi homogènes des degrés N, $N + 1$, ...

Définition 1. *La r-ième approximation de la p-composante* S_p^r *de l'algèbre stationnaire* est un espace de champs de vecteurs quasi homogènes s_p de degré p qui admettent des « prolongements » en des polynômes vecteurs $s_p + \ldots + s_{p+r-1}$ vérifiant un système de r équations

$$s_p f_0 = 0,\ s_p f_1 + s_{p+1} f_0 = 0,\ \ldots,\ s_p f_{r-1} + \ldots + s_{p+r-1} f_0 = 0.$$

Définition 2. La « *différentielle* » d^r opère sur un champ quasi homogène s_p dans S_p^r par la formule

$$d^r s_p = s_p f_r + \ldots + s_{p+r} f_0 \bmod I_{p+r}^r,$$

où les s_q vérifient les conditions de la définition 1 et I_{p+r}^r sera défini ci-après (pour $r > 0$ on peut prendre $s_{p+r} = 0$).

Définition 3. La $r + 1$*-ième approximation de la p-composante* I_p^{r+1} *de l'idéal gradient* est l'ensemble de tous les polynômes quasi homogènes de degré $N + p$ qui se laissent mettre sous la forme $s_{p-r} f_r + \ldots + s_p f_0$, où les champs quasi homogènes s_q des degrés indiqués vérifient les r conditions

$$s_{p-r} f_0 = 0,\ s_{p-r} f_1 + s_{p-r+1} f_0 = 0,\ \ldots,\ s_{p-r} f_{r-1} + \ldots + s_{p-1} f_0 = 0$$

et appartiennent à $\mathfrak{A}^+$ (i.e. tous les s_q de $q < 0$ sont nuls).

Définition 4. La *r-ième approximation de la p-composante de l'algèbre locale* est $A_p^r = A_p^0/I_p^0$ $(r > 0)$.

Proposition. *On a les égalités*

$$S_p^{r+1} = \operatorname{Ker}(d^r\colon S_p^r \to A_{p+r}^r), \quad A_{p+r}^{r+1} = A_{p+r}^r/d^rS_p^r.$$

Démonstration. Voir n° 14.4.

Exemple 1. $d^0\colon S_p^0 \to A_p^0$ se définit par l'égalité $d^0s_p = s_pf_0$. Par conséquent, I_p^1 est la $N+p$-composante homogène de l'idéal gradient de la partie quasi homogène f_0 de degré N de la fonction $f = f_0 + \ldots$ On peut donc identifier A_p^1 avec la $N+p$-composante de l'algèbre locale Q_{f_0} de la fonction quasi homogène f_0. Ensuite, S_p^1 est la p-composante de l'algèbre stationnaire de f_0.

Exemple 2. $d^1\colon S_p^1 \to A_{p+1}^1$ se définit par l'égalité $d^1s_p = s_pf_1 \bmod \{s_{p+1}f_0\}$, où $s_pf_0 = 0$. Donc,

$$S_p^2 = \{s_p\colon s_pf_0 = 0, \quad \exists s_{p+1}\colon s_pf_1 = s_{p+1}f_0\},$$
$$I_p^2 = \{s_pf_0\} + \{s_{p-1}f_1\colon s_{p-1}f_0 = 0\}$$

(pour $p = 0$ le second terme s'annule).

Ainsi donc, pour $r = 0$ et pour $r = 1$ la valeur d^rs_p de la différentielle d^r est la classe du polynôme s_pf_r. Cette simple formule de la différentielle cesse d'être vraie pour r grand.

Exemple 3. $d^2\colon S_p^2 \to A_{p+2}^2$ se définit par l'égalité $d^2s_p = s_pf_2 + s_{p+1}f_1 \bmod \{s_{p+2}f_0\} + \{s_{p+1}f_1\colon s_{p+1}f_0 = 0\}$, où $s_pf_0 = 0$, $s_pf_1 + s_{p+1}f_0 = 0$.

14.2. Théorèmes des formes normales.

1° Convergence des approximations successives.

Théorème. *Pour tout* $p \geqslant 0$, *les suites* $\{S_p^r\}$ *et* $\{A_p^r\}$ *deviennent stationnaires à partir d'un r suffisamment élevé,* $S_p^r = S_p^\infty$, $A_p^r = A_p^\infty$. *A la limite, les espaces* S_p^r, A_p^r *se confondent avec les espaces des p-formes initiales des éléments de l'algèbre stationnaire supérieure et de l'algèbre locale supérieure pour* f:

$$S_p^\infty \cong (S_f^+ \cap \mathfrak{a}_p)/(S_f^+ \cap \mathfrak{a}_{p+1}), \quad A_p^\infty \cong \mathcal{A}_p/[(\mathcal{A}_p \cap I_f^+) + \mathcal{A}_{p+1}].$$

Les isomorphismes indiqués sont définis par les applications canoniques $\mathcal{A}_p \to A_p^r$, $S_p^+ \cap \mathfrak{a}_p \to S_p^r$.

2° Forme normale des termes de degré p. Choisissons un p et un r tels que $p > r \geqslant 0$.

Théorème $T_{r,p}$. *Soient* $e_1, \ldots, e_u$ *des polynômes quasi homogènes de degré* $N + p$, *C-générateurs de* A_p^{r+1} *par l'application canonique* $\mathcal{A}_p \to A_p^{r+1}$. *Il existe alors un difféomorphisme formel*

$$y_1 = x_1 + g_1, \ldots, y_n = x_n + g_n, \quad \sum g_k \partial/\partial x_k \in \mathfrak{a}_{p-r},$$

tel que la série $f = f_0 + f_1 + \ldots$ *après substitution des* y *prenne la forme*

$$f_r(y_1, \ldots, y_n) = f_0(x) + \ldots + f_{p-1}(x) + \\ + \sum c_i e_i(x) + R, \qquad R \in \mathcal{A}_{p+1},$$

où c_i *sont des nombres.*

Ici comme ailleurs $f = f_0 + f_1 + \ldots$ est la décomposition de la série f en composantes quasi homogènes des degrés $N, N + 1, \ldots$

3° **Forme normale d'une** r**-ième approximation.** Fixons un $r \geqslant 0$.

Théorème T_r. *Soient* $e_1, e_2, \ldots$ *des polynômes quasi homogènes de tous les degrés possibles* $N + p$, $p > r$, *C-générateurs de tous les* A_p^{r+1} *par les applications canoniques* $\mathcal{A}_p \to A_p^{r+1}$. *Il existe alors un difféomorphisme formel*

$$y_1 = x_1 + g_1, \ldots, y_n = x_n + g_n, \quad \sum g_k \partial/\partial x_k \in \mathfrak{A}^+,$$

tel que la série $f = f_0 + f_1 + \ldots$ *après substitution des* y *prenne la forme*

$$f(y_1, \ldots, y_n) = f_0(x) + \ldots + f_r(x) + \sum c_i e_i, \quad \deg e_i > N + r,$$

où c_i *sont des nombres.*

4° **Conditions** B **et** C. Considérons la partie quasi homogène principale f_0 de la série $f = f_0 + f_1 + \ldots$

Définition. On dit que la série f *vérifie la condition B* si l'algèbre de Lie stationnaire du point f_0 est triviale (s'annule) pour l'action de l'algèbre de Lie des difféomorphismes quasi homogènes sur l'espace des polynômes quasi homogènes de degré $N = \deg f_0$.

Autrement dit, f vérifie la condition B si $S_0^1 = 0$. D'où il ressort que la condition B ne concerne que f_0.

Théorème BT. *Si* f *vérifie la condition* B, *le théorème* $T_{r,p}$ *a lieu pour* $r = p \geqslant 1$.

Définition. On appelle *algèbre de Lie négative* $\mathfrak{A}^-$ *de type* α l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de la forme $\sum a_s' \partial/\partial x_s$, où tous les monômes de chaque polynôme a_s' sont de degré strictement inférieur à celui du monôme x_s ($\deg x_s = \alpha_s$).

Remarquons que $\mathfrak{A}^-$ est une algèbre de Lie de dimension finie.

Définition. On dit que la série $f = f_0 + f_1 + \ldots$ *vérifie la condition C* si l'algèbre stationnaire du point f_0 pour l'action de l'al-

gèbre de Lie négative $\mathfrak{A}^-$ sur l'espace des polynômes de (quasi-) degré non supérieur à $N = \deg f_0$ devient triviale (s'annule).

Remarquons que la condition C ne concerne que f_0.

Théorème CT. *Si f vérifie la condition C, alors $I_f^+ = A^+ \cap I_f$.*

Corollaire. *Supposons que f vérifie la condition C, et soient e_1, e_2, e_3, . . . des polynômes quasi homogènes de tous les degrés possibles $N + p$, $p \geqslant 0$, qui engendrent des bases dans les espaces A_p^∞ de la suite spectrale par les applications canoniques $\mathcal{A}_p \to A_p^\infty$. Alors les images des polynômes e_1, e_2, . . . dans l'algèbre locale $Q_f = A/I_f$ sont* C*-linéairement indépendantes.*

Autrement dit, l'espace tangent de la déformation $f + \sum \lambda_i e_i$ traverse l'espace tangent à l'orbite de f en un point.

14.3. Exemple. Soit $f_0 = x^4 + x^2y^{2k+1}$, $k \geqslant 1$. C'est une fonction quasi homogène, de poids $\deg x = 2k + 1$, $\deg y = 2$, de degré $N = \deg f_0 = 8k + 4$. Elle vérifie les conditions B et C.

Théorème W. *Toute série formelle $f = f_0 + f_1 + \ldots$, où $\deg f_p = N + p$, se laisse réduire par un difféomorphisme formel soit à la forme normale*

$$W_{k,i} = f_0 + ax^3y^{k+1} + by^{4k+2+i},$$

où $a = a_0 + \ldots + a_{k-2}y^{k-2}$, $b = b_0 + \ldots + b_{2k-1}y^{2k-1}$, $i > 0$, $b_0 \neq 0$ (et $a = 0$ pour $k = 1$), soit à une forme normale analogue avec $b \equiv 0$ (cette dernière forme ne peut avoir lieu que si la multiplicité μ du point critique 0 est infinie). Le nombre des modules de la série f est non inférieur au nombre des paramètres de la forme normale (i.e. à $3k - 1$).

Démonstration. Nous identifierons les espaces quotients A_p/A_{p+1} et $\mathfrak{A}_p/\mathfrak{A}_{p+1}$ avec les espaces de polynômes quasi homogènes et de champs de vecteurs.

Soit s_p un champ quasi homogène de degré p. Alors, d'après le nº 14.1, on a $d^0s_p = s_pf_0$. On démontre facilement (par exemple, à l'aide de la technique des mots croisés du § 12) le

Lemme 1. *L'idéal homogène $\mathfrak{A}_0f_0$ contient les monômes x^4, x^3y^{2k}, x^2y^{2k+1}, xy^{4k+1} et le binôme $2x^3y^{k+1} + xy^{3k+2}$. Les espaces A_p^1 $(p > 0)$ de la première approximation sont engendrés sur* C *par les images des monômes x^3y^α, où $k + 1 \leqslant \alpha \leqslant 2k - 1$, et y^β, où $\beta > 4k + 2$.*

Conformément au lemme 1 et au théorème T_0 du nº 14.2, on peut mettre f sous la forme $F = f_0 + ax^3y^{k+1} = b$, où $a = a_0 + \ldots + a_{k-2}y^{k-2}$ et b est une série suivant les puissances de y dont le premier terme est déjà de degré supérieur à $4k + 2$ en y. Désignons par $4k + 2 + i$ l'exposant de puissance de y dans le premier terme non nul $b_0\varphi$, $\varphi = y^{4k+2+i}$, de la série b. Posons $r = \deg \varphi - N = 2i$.

Lemme 2. *Pour les approximations construites à partir de la série F on a*

$$d^1 = \ldots = d^{r-1} = 0, \quad d^r [s_p] = b_0 [s_p \varphi]$$

(*ici et dans le texte qui suit les crochets indiquent la classe latérale*).

Démonstration. Remarquons que l'algèbre stationnaire de la fonction f_0 est engendrée sur A par un champ $v = xy^{2k}(2k + 1)\,\partial/\partial x - (4x^2 + 2y^{2k+1})\,\partial/\partial y$ de degré $4k$, d'où $S_p^1 = 0$ pour $p < 4k$. On a donc $s \in \mathfrak{A}_{4k}$ pour tout champ $s = s_p + s_{p+1} + \ldots$ tel que $0 \neq s_p \in [s_p] \in S_p^r$, $r \geqslant 1$. Or, $\mathfrak{A}_{4k}(ax^3y^{k+1}) \subset \mathfrak{A}_0 f_0$. En effet, tous les éléments de l'idéal du premier membre se divisent par x^2 et sont de degré non inférieur à $10k + 4$, tandis que les éléments x^4, x^3y^{2k}, x^2y^{2k+1} de l'idéal du second membre sont de degré non inférieur à $10k + 4$. Chaque monôme de chaque élément de l'idéal du premier membre se divise donc par un des trois monômes indiqués, ce qui démontre l'inclusion précédente.

Il s'ensuit que le terme ax^3y^{k+1} de la forme normale est sans effet sur les approximations successives, d'où le lemme.

Lemme 3. *Pour $r = 2i$, $p \geqslant 4k$ on a l'égalité $d^r S_p^r = A_{p+1}^r$ et donc $d^q = 0$ pour $q > 2i$.*

Démonstration. D'après le lemme 2, on a $d^r S_{4k}^r \supset \mathbf{C}\,[v\varphi]$. Or, $v\varphi = (-4x^2 + 2y^{2k+1})\,c_0 y^{4k+1+i}$, où $c_0 \neq 0$. Ensuite, $x^2y^{4k+1} \in \mathfrak{A}_0 f_0$. Donc $\mathbf{C}\,[v\varphi] = \mathbf{C}\,[y^{6k+2+i}] = A_{4k+r}^r$ et $d^r S_{4k}^r = A_{4k+r}^r$. Multipliant par une puissance convenable de y, on retrouve la relation cherchée pour $p > 4k$.

Le théorème W découle maintenant des théorèmes BT_{2i} et CT (nº 14.2).

14.4. Démonstrations. 1° De la définition 1 on voit que S_p^r décroît quand r augmente, $S_p^{r+1} \subset S_p^r$. Or, S_p^0 est de dimension finie. Donc S_p^r *devient stationnaire pour* $r \to \infty$.

2° De la définition 3 on voit que I_p^r croît quand r augmente. Or, I_p^r est un sous-espace dans l'espace de dimension finie des polynômes quasi homogènes de degré $N + p$. Donc I_p^r *devient stationnaire pour* $r \to \infty$.

3° Des définitions 2 et 1 on voit que la somme dans le second membre de la formule de $d^r s_p$ est définie à des termes σ_q près ($q > p$) qui vérifient les conditions

$$\sigma_{p+1} f_0 = 0, \quad \sigma_{p+1} f_1 + \sigma_{p+2} f_0 = 0, \ \ldots$$
$$\ldots, \ \sigma_{p+1} f_{r-2} + \ldots + \sigma_{p+r-1} f_0 = 0.$$

Quand on ajoute σ_q à s_q, la somme en question augmente d'une quantité $\sigma_{p+1} f_{r-1} + \ldots + \sigma_{p+r} f_0$, quantité qui appartient à I_{p+r}^r d'après la définition 3. Par conséquent, *l'application $d^r : S_p^r \to A_{p+r}^r$ est bien définie*.

4° *Montrons que* $S_p^{r+1} = \operatorname{Ker}(d^r\colon S_p^r \to A_{p+r}^r)$. De la définition 1 on voit que S_p^{r+1} se compose des éléments $s_p \in S_p^r$ pour lesquels on peut choisir les s_q $(q > p)$ de façon à vérifier non seulement les équations définissant S_p^r mais aussi l'équation $s_p f_r + \ldots + s_{p+r} f_0 = 0$. Or, l'existence de tels s_q équivaut à la condition $s_p f_r + \ldots + s_{p+r} f_0 \in \in I_{p+r}^r$ pour tout choix des s_q vérifiant les équations qui définissent S_p^r (voir 3°). Donc $s_p \in S_p^{r+1} \Leftrightarrow d^r s_p = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

5° *Montrons que* $I_{p+r}^{r+1} \equiv d^r S_p^r \bmod I_{p+r}^r$. De la définition 3 on voit que I_{p+r}^{r+1} se compose des polynômes homogènes de degré $N + p + r$ admettant la représentation

$$a = s_p f_r + \ldots + s_{p+r} f_0, \text{ où } s_p f_0 = 0,$$
$$s_p f_1 + s_{p+1} f_0 = 0, \ldots, s_p f_{r-1} + \ldots + s_{p+r} f_0 = 0.$$

Cet espace vectoriel contient $I_{p+r}^r = \{a = s_{p+1} f_{r-1} + \ldots + s_{p+r} f_0\colon s_{p+1} f_0 = 0, s_{p+1} f_1 + s_{p+2} f_0 = 0, \ldots, s_{p+1} f_{r-2} + \ldots + s_{p+r-1} f_0 = = 0\}$, car on peut prendre $s_p = 0$. En confrontant les définitions de I_{p+r}^r et de I_{p+r}^{r+1}, on voit que le second espace se réduit — à I_{p+r}^r près — à des polynômes qui se laissent mettre sous la forme de la somme intervenant dans la définition de $d^r s_p$.

La proposition du n° 14.1 s'en trouve démontrée.

6° *Montrons que les approximations de la p-composante de l'algèbre stationnaire convergent justement vers cette composante,* $S^\infty \cong \cong (S_f^+ \cap \mathfrak{A})/(S_f^+ \cap \mathfrak{A}_{p+1})$.

Lemme. *Si* $s_p \in S_p^r$ *pour r quelconque, il existe une série formelle* $s = s_p + \ldots$ *telle que* $sf = 0$.

D é m o n s t r a t i o n du l e m m e. D'après la définition,

$$S_p^r = ((\mathfrak{a}_p \cap \partial^{-1} \mathcal{A}_{p+r}) + \mathfrak{a}_{p+1})/\mathfrak{a}_{p+1},$$

d'où

$$\bigcap_r S_p^r = ((\mathfrak{a}_p \cap (\bigcap_r \partial^{-1} \mathcal{A}_{p+r})) + \mathfrak{a}_{p+1})/\mathfrak{a}_{p+1}.$$

Or, $\bigcap_r \partial^{-1} \mathcal{A}_{p+r} = \partial^{-1} \bigcap_r \mathcal{A}_{p+r} = \partial^{-1} 0$. Donc $\bigcap_r S_p^r = ((\mathfrak{a}_p \cap S_f^+) + + \mathfrak{a}_{p+1})/\mathfrak{a}_{p+1}$, et le lemme est démontré.

Réciproquement, si $sf = 0$, alors s_p appartient à S_p^r pour r quelconque, ce qui démontre 6°.

7° *Montrons que les approximations de la p-composante de l'algèbre locale convergent justement vers cette composante:*

$$A_p^\infty \cong \mathcal{A}_p/[(\mathcal{A}_p \cap I_f^+) + \mathcal{A}_{p+1}].$$

En effet, si a_p est la p-forme initiale d'une r-ième approximation de l'idéal gradient positif, elle est en même temps celle d'un élément facilement identifiable de l'idéal gradient positif véritable. Réciproquement, la p-forme initiale a_p de tout élément de l'idéal gradient

positif admet la représentation

$$(s_0 + \ldots)\,(f_0 + \ldots) = a_p + \ldots$$

et intervient donc dans I_p^∞ (et même dans I_p^{p+1}).

Le théorème de la convergence du n° 14.2 s'en trouve démontré.

8° *Démonstration du théorème* $T_{r,p}$, $p > r \geqslant 0$. Il s'agit de montrer que les $N + p$-quasi-jets $[f]$ mod $\mathcal{A}_{p+1}$, $[f + \varphi_p]$ mod $\mathcal{A}_{p+1}$ sont renvoyés les uns sur les autres par un changement formel de variables d'ordre non négatif $y = x + g\,(x)$, $\sum g_s\partial/\partial x_s \in \mathfrak{a}_{p-r}$ si $[\varphi_p] \in I_p^{r+1}$. La dernière condition signifie qu'il existe une décomposition $\varphi_p = s_{p-r}f_r + \ldots + s_pf_0$, où les champs quasi homogènes s_q d'ordre non négatif vérifient les r conditions

$$s_{p-r}f_0 = 0, \ \ldots, \ s_{p-r}f_{r-1} + \ldots + s_{p-1}f_0 = 0.$$

La décomposition indiquée de φ_p et les conditions imposées aux s_q dépendent seulement des termes $f_0, \ldots, f_r$ de la décomposition de f et ne dépendent pas des termes suivants.

Considérons une famille à un paramètre de $N + p$-quasi-jets

$$F\,(t) = [f + t\varphi_p] \bmod \mathcal{A}_{p+1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Puisque $p > r$, la décomposition de $F\,(t)$ pour t quelconque en composantes quasi homogènes en x commence par les termes $f_0 + \ldots \ldots + f_r$ indépendants de t. Aussi l'espace des polynômes quasi homogènes I_p^{r+1} construit d'après $F\,(t)$ est-il le même pour t quelconque.

Définissons au voisinage de $0 \in \mathbf{C}^n$ un champ de vecteurs s tel que $s = s_{p-r} + \ldots + s_p$. Alors, quel que soit t, la dérivée du $N + p$-quasi-jet de $F\,(t)$ dans la direction du champ s est égale à

$$sF\,(t) = [(s_{p-r} + \ldots + s_p)\,(f_0 + \ldots f_p + t\varphi_p)] \bmod \mathcal{A}_{p+1} =$$
$$= [s_{p-r}f_0 + \ldots + (s_{p-r}f_r + \ldots + s_pf_0)] \bmod \mathcal{A}_{p+1} = [\varphi_p] \bmod \mathcal{A}_{p+1}$$

(la condition $p > r$ est essentielle, car pour $p = r$ le terme $t\varphi_p$ aurait affecté la valeur de $sF\,(t)$).

Le champ s s'annule en $0 \in \mathbf{C}^n$, car $s \in \mathfrak{a}_{p-r}$. Aussi le flot de s est-il déterminé dans un voisinage suffisamment petit de $0 \in \mathbf{C}^n$ pour tout t tel que $0 \leqslant t \leqslant 1$. La transformation de ce flot pendant le temps $t = 1$ définit le p-jet d'un difféomorphisme local envoyant $F\,(0)$ sur $F\,(1)$ et de la forme $y = x + g\,(x)$, $\sum g_k\partial/\partial x_k \in \mathfrak{a}_{p-r}$. Ceci est justement le difféomorphisme cherché.

9° *Démonstration du théorème* T_r, $r \geqslant 0$. Appliquons successivement les théorèmes $T_{r,r+1}$, $T_{r,r+2}$, ... pour réduire à la forme normale les termes de (quasi-)degré $N + p$, où $p = r + 1, r + 2, \ldots$ Pendant ces opérations les $r + 1$ premiers termes de la décomposition $f = f_0 + \ldots + f_r + \ldots$ restent inchangés. Par conséquent, la normalisation des termes des (quasi-)degrés indiqués laisse inchangés les espaces I_p^{r+1} et A_p^{r+1}. On peut donc appliquer à la série

obtenue par le premier changement de variables (celui du théorème $T_{r,r+1}$) le théorème suivant, et ainsi de suite.

La suite obtenue des changements formels de variables est convergente, car les termes de chaque degré fixé deviennent stationnaires (puisque $y - x \in \mathfrak{a}_{p-r}$ dans le théorème $T_{r,p}$). Le changement formel limite est celui que l'on cherche.

10° *Démonstration du théorème BT*. Soit $p = r \geqslant 1$; supposons que f vérifie la condition B. Démontrons le théorème $T_{r,r}$. Posons $p = r$ dans la démonstration du théorème $T_{r,p}$ de 8° ; il vient

$$\varphi_r = s_0 f_r + \ldots + s_r f_0,$$

où les s_q vérifient les r conditions $s_0 f_0 = 0$, $s_0 f_1 + s_1 f_0 = 0$, ..., $s_0 f_{r-1} + \ldots + s_{r-1} f_0 = 0$. Or, $s_0 = 0$ par la condition B. Par conséquent, ni la décomposition de φ_r, ni les conditions imposées aux s_q ne dépendent de f_r (mais uniquement de $f_0, \ldots, f_{r-1}$). Pour cette même raison l'espace I_p^{r+1} construit d'après $F(t)$ est indépendant de t quand $p = r$. La fin de la démonstration du théorème $T_{r,r}$ est analogue à celle du théorème $T_{r,p}$ pour $p > r$ (voir 8°).

11° *Démonstration du théorème CT*. Par définition, $I_f^+ = \mathfrak{A}^+ f$, $I_f = \mathfrak{A} f$. Donc $I_f^+ \subset I_f$ et $I_f^+ \subset \mathcal{A}_0$, d'où $I_f^+ \subset I_f \cap \mathcal{A}_0$.

Démontrons l'inclusion inverse. Soit $u \in I_f \cap \mathcal{A}_0$. Alors $u = af$, $a \in \mathfrak{A}$. Considérons une composante quasi homogène non nulle a_q du champ a de plus bas quasi-degré q. Les quasi-degrés de toutes les composantes quasi homogènes de la série af, sauf $a_q f_0$, sont supérieurs au quasi-degré du polynôme $a_q f_0$. Si $q < 0$, on a $a_q f_0 \neq 0$ par la condition C. Donc, $q < 0$ contredit $u \in \mathcal{A}_0$. Il s'ensuit que $q \geqslant 0$, i.e. que $a \in \mathfrak{A}^+$, $u \in I_f^+$, ce qu'il fallait démontrer.

§ 15. Listes de singularités

Dans ce paragraphe nous décrirons un commencement de l'hiérarchie des classes de singularités des fonctions holomorphes.

15.0. Remarques préliminaires.

1. Formes normales. On appelle *classe de singularités* un sous-ensemble de l'espace des germes (ou des jets) de fonctions en 0 invariant par l'action du groupe des difféomorphismes de la source qui conservent 0. Un exemple de classes de singularités sont les orbites. On dit que deux germes (ou deux jets) sont *équivalents* s'ils appartiennent à une même orbite.

Un autre exemple de classe est la strate μ = Cte. Par *multiplicité* (ou *nombre de Milnor*) μ du point critique $0 \in \mathbf{C}^n$ d'une fonction f, on entend l'indice du point singulier 0 du champ de vecteurs grad f.

La strate μ = Cte de f est la composante connexe contenant f de l'espace des germes de multiplicité fixée μ en 0. Deux fonctions appartenant à une même strate μ = Cte sont dites *μ-équivalentes*.

Pour définir la *forme normale*, considérons l'espace de polynômes $M = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ en l'assimilant à un sous-ensemble dans l'espace des germes en 0 de fonctions $f(x_1, \ldots, x_n)$.

La *forme normale pour une classe K de fonctions* est définie par une application différentiable $\Phi: B \to M$ de l'espace vectoriel B de dimension finie des paramètres dans l'espace des polynômes, telle que

1) $\Phi(B)$ rencontre toutes les orbites de K;

2) l'image réciproque de chaque orbite dans B soit finie;

3) l'image réciproque de la totalité du complémentaire de K soit contenue dans une hypersurface propre de B.

On dit que la forme normale est *polynomiale* (resp. *affine*) si Φ est une application polynomiale (resp. linéaire non homogène). Une forme normale affine est appelée *simple* si Φ se laisse développer comme suit:

$$\Phi(b_1, \ldots, b_r) = \varphi_0 + b_1 x^{m_1} + \ldots + b_r x^{m_r},$$

où φ_0 est un polynôme fixé, b_i sont des nombres et x^{m_i} des monômes. (Dans les applications le polynôme φ_0 est généralement lui-même « simple », i.e. représente la somme d'un petit nombre de monômes.)

L'existence d'une forme normale unique (ne serait-ce que polynomiale) pour toute la strate μ = Cte n'est pas évidente *a priori*. Une conclusion surprenante est l'existence de telles formes normales pour toutes les singularités de notre liste (donc aussi, en particulier, pour toutes les singularités à un et à deux modules). La plupart de nos formes normales sont simples; il est probable que toutes les singularités de notre liste admettent des formes normales simples. On ignore l'étendue de la classe des fonctions pour lesquelles la strate μ = Cte admet une forme normale simple (ou au moins polynomiale). (Il est naturel de poser cette question pour les classes d'équivalence stable.) J. Wahl et V. Vasiliev [310] ont indiqué un exemple de strate μ = Cte qui n'a pas de forme normale affine; à cette strate appartient la fonction

$$f = x^2y^2(x + y)^2(x + 2y)^2 + x^9 - y^9.$$

2. Séries de singularités. Dans notre liste les singularités sont réparties en *séries* désignées par des lettres majuscules (nous réservons les caractères maigres $A, \ldots, Z$ indiciés aux strates μ = Cte et les caractères demi-gras $\mathbf{A}, \ldots, \mathbf{Z}$ indiciés ou non aux classes de singularités qui sont réunions de strates μ = Cte). Bien que les séries existent indubitablement, il n'est pas très clair ce qu'est une série de singularités.

A titre d'exemple, considérons les séries A et D constituées par les orbites de germes A_k: $f(x, y) = x^{k+1} + y^2$, D_k: $f(x, y) = x^2y + y^{k-1}$. Les classes A_k, D_k sont adjacentes *), notamment

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 \leftarrow & A_2 \leftarrow & A_3 \leftarrow & A_4 \leftarrow \dots \\ & & \uparrow & \uparrow \\ & & D_4 \leftarrow & D_5 \leftarrow \dots \end{array}$$

Il est clair que dans cet exemple il y a deux séries, A et D. Quel est cependant le sens formel de cette notion? Les séries existent-elles en réalité ou appelons-nous délibérément série certains ensembles de singularités?

Définir la série A revient à apprendre à inverser les flèches d'adjacence de façon à pouvoir aller de A_k vers A_{k+1} sans faire le détour par D_{k+1}. On le fait sans difficulté dans le cas considéré (les singularités de A ont le corang de la différentielle seconde inférieur ou au plus égal à 1). Dans des cas plus compliqués on réussit également à formuler des règles d'inversion des flèches, règles qui varient suivant le cas. On voit apparaître alors des séries à un ou plusieurs indices (telle la série à indice triple $T_{k,l,m} = axyz + x^k + y^l + z^m$), les fonctions de la série pouvant dépendre de paramètres.

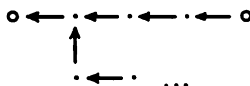
Comme pour les séries A et D que nous venons de considérer, on peut toujours définir *a posteriori* chaque série de nos listes. Mais donner une définition générale à une série de singularités est pour le moment impossible. Tout ce que l'on sait, c'est que les séries sont liées à des singularités de multiplicité infinie (par exemple, $D \sim x^2y$, $T \sim xyz$), si bien que l'hiérarchie des séries traduit celle des singularités non isolées.

3. Périodicité. La partition en strates $\mu =$ Cte de bon nombre de classes de singularités présente une certaine périodicité qu'on peut décrire comme suit. La stratification (partition) dans son ensemble se réduit à une file de fragments identiques, ou bestioles. Chaque bestiole est composée de points (strates), dont deux points privilégiés: la tête et la queue. En plus de la tête et de la queue, une bestiole peut présenter des strates intercalaires qui les relient par des flèches d'adjacence, ainsi que des pattes (séries de longueur infinie). La tête de chaque bestiole est adjacente à la queue de la bestiole immédiatement précédente.

Par exemple, la stratification des singularités de corang 2 à 3-jet x^3 est une file de bestioles dont chacune a cinq points et une

*) Une classe de singularités L *est adjacente* à une classe K (symbole: $K \leftarrow L$) si l'on peut, par une petite déformation, faire de toute fonction f de L une fonction de K.

patte infinie:



(J_k dans notre liste).

La raison de la périodicité n'est pas claire dans le cas général. On ne dispose que d'une explication partielle pour les singularités quasi homogènes, fondée sur une technique rappelant les éventails d'Enriques-Demazure (voir [82]).

Or, la périodicité apparaît non seulement lors de la réduction à la forme normale des fonctions quasi homogènes mais aussi pendant tout calcul lié à une classification; en fait, il suffit donc de considérer une seule bestiole de la file, quel que soit le calcul à effectuer.

Tout comme l'existence des séries, le phénomène de périodicité fait penser à une structure algébrique qui devrait exister dans l'ensemble des strates.

D. Siersma a exhibé [265] le lien qui existe entre la périodicité et la résolution des singularités ; le décalage d'une période correspond exactement à un éclatement. Cette remarque n'explique malheureusement pas la périodicité des calculs que nous venons de mentionner.

4. **Classes de faible modalité.** Au point de vue des applications, une caractéristique très importante d'une classe de singularités est sa *codimension* c dans l'espace des germes de fonctions de point critique 0 et de valeur critique 0.

En effet, une fonction générique n'a que des singularités de codimension $c = 0$ (non dégénérées). Une singularité dégénérée non supprimable ne peut exister que dans le cas d'une famille de fonctions dépendant de paramètres. La classe de codimension c est alors non supprimable par une petite déformation seulement si le nombre de paramètres $l \geqslant c$.

On doit donc toujours, dans un problème appliqué, aller dans l'étude des classes jusqu'à la codimension l (i.e. étudier toutes les classes telles que le complémentaire de leur réunion soit de codimension supérieure à l). On prendra garde à ne pas confondre ce problème avec le problème de classification des singularités dont la codimension de l'orbite est inférieure ou égale à l (i.e. telles que $\mu \leqslant l + 1$). Dans les applications, ce dernier problème n'est qu'un moyen de résoudre le premier.

Du point de vue de la topologie, une caractéristique capitale de la singularité est la multiplicité μ du point critique (le nombre des points critiques simples engendrés par décomposition d'un point critique composé à la suite d'une petite déformation).

Les calculs effectués ont donné lieu à une conclusion inattendue: *les résultats algébriquement les plus naturels ne sont pas obtenus en classifiant les classes de singularités jusqu'à une codimension c ou une multiplicité μ données, mais en classifiant les classes de singularités de faible modalité m.*

La modalité m est la dimension diminuée de 1 de la strate $\mu = \text{Cte}$ dans la base du déploiement miniversel (cf. [105]). Aussi la codimension c de la strate $\mu = \text{Cte}$ dans l'espace des germes de fonctions de point critique 0 et de valeur critique 0, la multiplicité μ et la modalité m vérifient-elles ensemble la relation

$$\mu = c + m + 1.$$

Il existe actuellement des classifications complètes de
(1) toutes les singularités de $c \leqslant 10$;
(2) toutes les singularités de $\mu \leqslant 16$;
(3) toutes les singularités de $m \leqslant 2$.

Les singularités caractérisées par un nombre de modules $m = 0$, 1 et 2 sont appelées *simples*, *unimodales* (*unimodulaires*) et *bimodales* (*bimodulaires*) respectivement. Leurs listes seront données ci-après. Une analyse des listes obtenues montre que

1) les singularités simples se laissent classifier exactement d'après les groupes de Coxeter A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 (i.e. d'après les polyèdres réguliers dans l'espace tridimensionnel);

2) les singularités unimodales forment une série infinie à trois indices T et 14 familles « exceptionnelles » à un paramètre engendrées par des singularités quasi homogènes.

Les singularités unimodales quasi homogènes se déduisent à partir de fonctions automorphes qui sont liées à 14 triangles remarquables sur le plan lobatchevskien et à trois triangles remarquables sur le plan ordinaire exactement de la même façon que les singularités simples sont liées aux polyèdres réguliers (voir [85] à [87]);

3) les singularités bimodales forment 8 séries infinies et 14 familles exceptionnelles à deux paramètres engendrées par des singularités quasi homogènes.

Les singularités bimodales quasi homogènes sont liées à 6 types de quadrangles et à 14 triangles sur le plan lobatchevskien (dans ce dernier cas il convient de prendre des fonctions automorphes dont les facteurs d'automorphie correspondent à des revêtements à 2, 3 et 5 feuillets) (cf. [86]).

Toutes les singularités uni- et bimodales sont classifiées exactement d'après les dégénérescences de courbes elliptiques dont la classification a été établie par Kodaira (cf. [176]). V. Kulikov a indiqué que pour obtenir ces singularités à partir des dégénérescences de la courbe elliptique, on doit faire éclater un, deux ou trois points sur la résolution minimale de la fibre dégénérée et ensuite contracter la fibre initiale (cf. [176]).

Malheureusement, tous les résultats énumérés ci-dessus ont été dégagés en confrontant des théorèmes de classification démontrés de façon indépendante, théorèmes dont aucun n'a pu être déduit de l'autre.

15.1. Singularités avec un nombre de modules $m = 0$, 1 et 2.

0. Singularités simples ($m = 0$). Il existe deux séries infinies A, D et trois singularités exceptionnelles E_6, E_7, E_8:

A_k, $k \geqslant 1$	D_k, $k \geqslant 4$	E_6	E_7	E_8
x^{k+1}	$x^2y + y^{k-1}$	$x^3 + y^4$	$x^3 + xy^3$	$x^3 + y^5$

1. Singularités unimodales ($m = 1$). Il existe trois familles de singularités paraboliques, une série à trois indices de singularités hyperboliques et quatorze familles de singularités exceptionnelles.

Paraboliques:

P_8	$x^3 + y^3 + z^3 + axyz$	$a^3 + 27 \neq 0$
X_9	$x^4 + y^4 + ax^2y^2$	$a^2 \neq 4$
J_{10}	$x^3 + y^6 + ax^2y^2$	$4a^3 + 27 \neq 0$

Hyperboliques:

$$T_{p,q,r} : x^p + y^q + z^r + axyz, \quad a \neq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1.$$

Quatorze familles exceptionnelles:

E_{12}	$x^3 + y^7 + axy^5$	E_{13}	$x^3 + xy^5 + ay^8$
E_{14}	$x^3 + y^8 + axy^6$	Z_{11}	$x^3y + y^5 + axy^4$
Z_{12}	$x^3y + xy^4 + ax^2y^3$	Z_{13}	$x^3y + y^6 + axy^5$
W_{12}	$x^4 + y^5 + ax^2y^3$	W_{13}	$x^4 + xy^4 + ay^6$
Q_{10}	$x^3 + y^4 + yz^2 + axy^3$	Q_{11}	$x^3 + y^2z + xz^3 + az^5$
Q_{12}	$x^3 + y^5 + yz^2 + axy^4$	S_{11}	$x^4 + y^2z + xz^2 + ax^3z$
S_{12}	$x^2y + y^2z + xz^3 + az^5$	U_{12}	$x^3 + y^3 + z^4 + axyz^2$

2. Singularités bimodales ($m = 2$). Il existe 8 séries infinies et 14 familles exceptionnelles. Soit $a = a_0 + a_1y$.

Quatre séries infinies de singularités bimodales de corang 2:

Nom	Forme normale	Restrictions	Multiplicité μ
$J_{3,0}$	$x^3+bx^2y^3+y^9+cxy^7$	$4b^3+27\neq 0$	16
$J_{3,p}$	$x^2+x^2y^3+ay^{9+p}$	$p>0,\ a_0\neq 0$	$16+p$
$Z_{1,0}$	$x^3y+dx^2y^3+cxy^6+y^7$	$4d^3+27\neq 0$	15
$Z_{1,p}$	$x^3y+x^2y^3+ay^{7+p}$	$p>0,\ a_0\neq 0$	$15+p$
$W_{1,0}$	$x^4+ax^2y^3+y^6$	$a_0^2\neq 4$	15
$W_{1,p}$	$x^4+x^2y^3+ay^{6+p}$	$p>0,\ a_0\neq 0$	$15+p$
$W^{\#}_{1,2q-1}$	$(x^2+y^3)^2+axy^{4+q}$	$q>0,\ a_0\neq 0$	$15+2q-1$
$W^{\#}_{1,2q}$	$(x^2+y^3)^2+ax^2y^{3+q}$	$q>0,\ a_0\neq 0$	$15+2q$

Quatre séries infinies de singularités bimodales de corang 3:

Nom	Forme normale	Restrictions	Multiplicité μ
$Q_{2,0}$	$x^3+yz^2+ax^2y^2+xy^4$	$a_0^2\neq 4$	14
$Q_{2,p}$	$x^3+yz^2+x^2y^2+ay^{6+p}$	$p>0,\ a_0\neq 0$	$14+p$
$S_{1,0}$	$x^2z+yz^2+y^5+azy^3$	$a_0^2\neq 4$	14
$S_{1,p}$	$x^2z+yz^2+x^2y^2+ay^{5+p}$	$p>0,\ a_0\neq 0$	$14+p$
$S^{\#}_{1,2q-1}$	$x^2z+yz^2+zy^3+axy^{3+q}$	$q>0,\ a_0\neq 0$	$14+2q-1$
$S^{\#}_{1,2q}$	$x^2z+yz^2+zy^3+ax^2y^{2+q}$	$q>0,\ a_0\neq 0$	$14+2q$
$U_{1,0}$	$x^3+xz^2+xy^3+ay^3z$	$a_0(a_0^2+1)\neq 0$	14
$U_{1,2q-1}$	$x^3+xz^2+xy^3+ay^{1+q}z^2$	$q>0,\ a_0\neq 0$	$14+2q-1$
$U_{1,2q}$	$x^3+xz^2+xy^3+ay^{3+q}z$	$q>0,\ a_0\neq 0$	$14+2q$

Quatorze familles exceptionnelles:

E_{18}	$x^3+y^{10}+axy^7$	E_{19}	$x^3+xy^7+ay^{11}$
E_{20}	$x^3+y^{11}+axy^8$	Z_{17}	$x^3y+y^8+axy^6$
Z_{18}	$x^3y+xy^6+ay^9$	Z_{19}	$x^3y+y^9+axy^7$
W_{17}	$x^4+xy^5+ay^7$	W_{18}	$x^4+y^7+ax^2y^4$
Q_{16}	$x^3+yz^2+y^7+axy^5$	Q_{17}	$x^3+yz^2+xy^5+ay^8$
Q_{18}	$x^3+yz^2+y^8+axy^6$	S_{16}	$x^2z+yz^2+xy^4+ay^6$
S_{17}	$x^2z+yz^2+y^6+azy^4$	U_{16}	$x^3+xz^2+y^5+ax^2y^2$

Toutes les fonctions des familles énumérées sont bimodales si les restrictions indiquées sont respectées.

15.2. Singularités de corang 2 avec le 4-jet non nul. On a partout dans ce n° $a = a_0 + \ldots + a_{k-2}y^{k-2}$ (avec $a = 0$ pour $k = 1$).

1. *Singularités de corang 2 avec le 4-jet non nul.* En plus des singularités simples A, D, E_6, E_7, E_8, il existe une série infinie de classes:

Nom	Forme normale	Restrictions	Multiplicité μ	Modalité m
$J_{k,0}$	$x^3 + bx^2y^k + y^{3k} + cxy^{2k+1}$	$k > 1$ $4b^3 + 27 \neq 0$	$6k-2$	$k-1$
$J_{k,i}$	$x^3 + x^2y^k + ax^{3k+i}$	$k > 1$, $i > 0$, $a_0 \neq 0$	$6k-2+i$	$k-1$
E_{6k}	$x^3 + y^{3k+1} + axy^{2k+1}$	$k \geqslant 1$	$6k$	$k-1$
E_{6k+1}	$x^3 + xy^{2k+1} + ay^{3k+2}$	$k \geqslant 1$	$6k+1$	$k-1$
E_{6k+2}	$x^3 + y^{3k+2} + axy^{2k+2}$	$k \geqslant 1$	$6k+2$	$k-1$

Ici $c = c_0 + \ldots + c_{k-3}y^{k-3}$ pour $k > 2$, avec $c = 0$ pour $k = 2$.

2. *Singularités de corang 2 avec le 3-jet nul et le 4-jet non nul.* Il existe quatre séries infinies de classes X, Y, Z et W.

Singularités des classes X et Y:

Nom	Forme normale ($k>1$)	Restrictions	Multiplicité μ	Modalité m
$X_{k,0}$	$x^4 + bx^3y^k + ax^2y^{2k} + xy^{3k}$	$\Delta \neq 0$ $a_0b_0 \neq 9$	$12k-3$	$3k-2$
$X_{k,p}$	$x^4 + ax^3y^k + x^2y^{2k} + by^{4k+p}$	$a_0^2 \neq 4$, $b_0 \neq 0$ $p > 0$	$12k-3+p$	$3k-2$
$Y^k_{r,s}$	$[(x+ay^k)^2 + by^{2k+s}] \times$ $\times (x^2 + y^{2k+r})$	$1 \leqslant s \leqslant r$, $a_0 \neq 0 \neq b_0$	$12k-3+r+s$	$3k-2$

Pour $k = 1$ les formules sont à modifier légèrement:

Nom	Forme normale	Restrictions	Multiplicité μ	Modalité m
$X_{1,0}$	$x^4 + a_0x^2y^2 + y^4$	$a_0^2 \neq 4$	9	1
$X_{1,p}$	$x^4 + x^2y^2 + a_0y^{4+p}$	$a_0 \neq 0$	$9+p$	1
$Y^1_{r,s}$	$x^{4+r} + a_0x^2y^2 + y^{4+s}$	$a_0 \neq 0$	$9+r+s$	1

On a, bien sûr, $X_{1,0} = X_9$, $X_{1,p} = T_{2,4,4+p}$, $Y^1_{r,s} = T_{2,4+r,4+s}$ (voir n° 15.1). Ici

$$\Delta = 4(a_0^3 + b_0^3) - a_0^2 b_0^2 - 18a_0 b_0 + 27, \quad b = b_0 + \ldots + b_{2k-2}y^{2k-2}.$$

Singularités de la classe Z. Les singularités $Z^k_{i,0}$ et Z^k_μ, $k > 1$, ont une forme normale du type $f = (x - ay^k) f_2$, où a_0 est non nul et f_2 se définit par le tableau suivant:

Nom	f_2	Restrictions ($k > 1$)	Multiplicité μ	Modalité m
$Z^k_{i,0}$	$x^3 + dx^2y^{k+i} + cxy^{2k+2i+1} + y^{3k+3i}$	$4d^3 + 27 \neq 0$, $i > 0$	$12k + 6i - 3$	$3k + i - 2$
$Z^k_{12k+6i-1}$	$x^3 + bxy^{2k+2i+1} + y^{3k+3i+1}$	$i \geqslant 0$	$12k + 6i - 1$	$3k + i - 2$
Z^k_{12k+6i}	$x^3 + xy^{2k+2i+1} + by^{3k+3i+2}$	$i \geqslant 0$	$12k + 6i$	$3k + i - 2$
$Z^k_{12k+6i+1}$	$x^3 + bxy^{2k+2i+2} + y^{3k+3i+2}$	$i \geqslant 0$	$12k + 6i + 1$	$3k + i - 2$

La singularité $Z^k_{i,p}$, $k > 1$, $i > 0$, $p > 0$, a une forme normale

$$Z^k_{i,p}: (x^2 + axy^k + by^{2k+i})(x^2 + y^{2k+2i+p}) \quad (a_0 \neq 0, \ b_0 \neq 0),$$

de multiplicité $\mu = 12k + 6i + p - 3$ et de modalité $m = 3k + i - 2$.

Pour $k = 1$ il convient de modifier les formules précédentes comme suit:

1) l'indice supérieur k est à omettre;

2) les singularités $Z_{i,0}$, Z_{6i+11}, Z_{6i+12}, Z_{6i+13}, $i > 0$, ont des formes normales du type $f = yf_2$, où f_2 est définie dans le tableau précédent;

3) $Z_{i,p}$: $y(x^3 + x^2y^{i+1} + by^{3i+p+3})$, $b_0 \neq 0$, $i > 0$, $p > 0$; $\mu = 9 + 6i + p$, $m = i + 1$.

On a partout dans les formules de ce n°

$$b = b_0 + \ldots + b_{2k+i-2}y^{2k+i-2}, \quad c = c_0 + \ldots + c_{2k+i-3}y^{2k+i-3}.$$

Singularités de la classe W :

Nom	Forme normale	Restrictions	Multiplicité μ	Modalité m
W_{12k}	$x^4+y^{4k+1}+axy^{3k+1}+$ $+cx^2y^{2k+1}$	$k\geqslant 1$	$12k$	$3k-2$
W_{12k+1}	$x^4+xy^{3k+1}+ax^2y^{2k+1}+$ $+cy^{4k+2}$	$k\geqslant 1$	$12k+1$	$3k-2$
$W_{k,0}$	$x^4+bx^2y^{2k+1}+axy^{3k+2}+$ $+y^{4k+2}$	$k\geqslant 1,\ b_0^2\neq 4$	$12k+3$	$3k-1$
$W_{k,i}$	$x^4+ax^3y^{k+1}+x^2y^{2k+1}+$ $+by^{4k+2+i}$	$i>0,\ b_0\neq 0$	$12k+3+i$	$3k-1$
$W^{\#}_{k,2q-1}$	$(x^2+y^{2k+1})^2+bxy^{3k+1+q}+$ $+ay^{4k+2+q}$	$q>0,\ b_0\neq 0$	$12k+2+2q$	$3k-1$
$W^{\#}_{k,2q}$	$(x^2+y^{2k+1})^2+bx^2y^{2k+1+q}+$ $+axy^{3k+2+q}$	$q>0,\ b_0\neq 0$	$12k+3+2q$	$3k-1$
W_{12k+5}	$x^4+xy^{3k+2}+ax^2y^{2k+2}+$ $+by^{4k+3}$	$k\geqslant 1$	$12k+5$	$3k-1$
W_{12k+6}	$x^4+y^{4k+3}+axy^{3k+3}+$ $+bx^2y^{2k+2}$	$k\geqslant 1$	$12k+6$	$3k-1$

Dans ces formules $b=b_0+\ldots+b_{2k-1}y^{2k-1}$, $c=c_0+\ldots+$ $+c_{2k-2}y^{2k-2}$; on a comme ailleurs $a=a_0+\ldots+a_{k-2}y^{k-2}$ pour $k>1$ et $a=0$ pour $k=1$.

15.3. Singularités de corang 3 avec le 3-jet réduit. En plus des singularités unimodales de la série T (voir n° 15.1), il existe trois séries infinies Q, S et U de classes de telles singularités.

1. *Série Q.* Les singularités avec le 3-jet x^3+yz^2 forment une série infinie de classes:

Nom	Forme normale	Restrictions	Multiplicité μ	Modalité m
$Q_{k,0}$	$\varphi+bx^2y^k+xy^{2k}$	$k>1,\ b_0^2\neq 4$	$6k+2$	k
$Q_{k,i}$	$\varphi+x^2y^k+by^{3k+i}$	$k>1,\ b_0\neq 0$	$6k+2+i$	k
Q_{6k+4}	$\varphi+y^{3k+1}+bxy^{2k+1}$	$k\geqslant 1$	$6k+4$	k
Q_{6k+5}	$\varphi+xy^{2k+1}+by^{3k+2}$	$k\geqslant 1$	$6k+5$	k
Q_{6k+6}	$\varphi+y^{3k+2}+bxy^{2k+2}$	$k\geqslant 1$	$6k+6$	k

Dans ces formules $\varphi=x^3+yz^2$, $b=b_0+\ldots+b_{k-1}y^{k-1}$.

2. *Série S.* Les singularités avec le 3-jet $x^2z + yz^2$ forment une série infinie de classes:

Nom	Forme normale	Restrictions	Multiplicité μ	Modalité m
S_{12k-1}	$\varphi + y^{4k} + axy^{3k} + czy^{2k+1}$	néant	$12k-1$	$3k-2$
S_{12k}	$\varphi + xy^{3k} + cy^{4k+1} + azy^{2k+1}$	néant	$12k$	$3k-2$
$S_{k,0}$	$\varphi + y^{4k+1} + axy^{3k+1} + bzy^{2k+1}$	$b_0^2 \neq 4$	$12k+2$	$3k-1$
$S_{k,i}$	$\varphi + x^2y^{2k} + ax^3y^k + by^{4k+1+i}$	$i > 0$, $b_0 \neq 0$	$12k+2+i$	$3k-1$
$S^{\#}_{k,2q-1}$	$\varphi + zy^{2k+1} + bxy^{3k+q} + ay^{4k+q+1}$	$q > 0$, $b_0 \neq 0$	$12k+2q+1$	$3k-1$
$S^{\#}_{k,2q}$	$\varphi + zy^{2k+1} + bx^2y^{2k+q} + axy^{3k+q+1}$	$q > 0$, $b_0 \neq 0$	$12k+2q+2$	$3k-1$
S_{12k+4}	$\varphi + xy^{3k+1} + azy^{2k+2} + by^{4k+2}$	néant	$12k+4$	$3k-1$
S_{12k+5}	$\varphi + y^{4k+2} + axy^{3k+2} + bzy^{2k+2}$	néant	$12k+5$	$3k-1$

Dans ces formules $\varphi = x^2z + yz^2$, $a = a_0 + \ldots + a_{k-2}y^{k-2}$ pour $k > 1$ et $a = 0$ pour $k = 1$; $b = b_0 + \ldots + b_{2k-1}y^{2k-1}$, $c = c_0 + \ldots + c_{2k-2}y^{2k-2}$.

Il existe en outre des classes S_k^*, $k > 1$, qui se subdivisent en $S^*_{k,0}$, SP_k, SQ_k, SR_k, où $\mu(S^*_{k,0}) = 12k - 4$, $m(S^*_{k,0}) = \ldots$ $\ldots = m(SR_k) = 3k - 2$, codim $S_k^* = 9k - 3$.

3. *Série U.* Les singularités avec le 3-jet $x^3 + xz^2$ forment une série infinie de classes:

Nom	Forme normale	Restrictions	Multiplicité μ	Modalité m
U_{12k}	$\varphi + y^{3k+1} + axy^{2k+1} + bzy^{2k+1} + dx^2y^{k+1}$	néant	$12k$	$4k-3$
$U_{k,2q}$	$\varphi + xy^{3k+1} + ax^2y^{k+1} + by^{3k+2+q} + czy^{2k+1+q}$	$q \geqslant 0$, $c_0 \neq 0$	$12k+2+2q$	$4k-2$
$U_{k,2q-1}$	$\varphi + xy^{3k+1} + ax^2y^{k+1} + bzy^{3k+1+q} + cz^2y^{k+q}$	$q > 0$, $c_0 \neq 0$	$12k+1+2q$	$4k-2$
U_{12k+4}	$\varphi + y^{3k+2} + axy^{2k+2} + bzy^{2k+2} + cx^2y^{k+1}$	néant	$12k+4$	$4k-2$

Dans ces formules $\varphi = x^3 + xz^2$, $c_0^2 + 1 \neq 0$ pour $q = 0$, et partout

$$a = a_0 + \ldots + a_{k-2}y^{k-2} \text{ pour } k > 1 \text{ et } a = 0 \text{ pour } k = 1;$$
$$b = b_0 + \ldots + b_{k-2}y^{k-2} \text{ pour } k > 1 \text{ et } b = 0 \text{ pour } k = 1;$$
$$c = c_0 + \ldots + c_{2k-1}y^{2k-1};$$
$$d = d_0 + \ldots + d_{2k-2}y^{2k-2}.$$

Il existe en outre des classes U_k^*, $k > 1$, qui se subdivisent en $U_{k,0}^*$, UP_k, UQ_k, UR_k, US_k, UT_k telles que

$$\mu \geqslant \mu(U_{k,0}^*) = 12k - 4, \quad m(U_{k,0}^*) = \ldots = m(UT_k) = 4k - 3,$$
$$\text{codim } (U_k^*) = 8k - 2.$$

15.4. Série V. Les singularités de corang 3 avec le 3-jet x^2y se subdivisent en classes $V_{1,t}$, $V_{1,t}^{\#}$, V^*, où:

Nom	Forme normale	Restrictions	Multiplicité μ	Modalité m
$V_{1,0}$	$x^2y + z^4 + az^3y + bz^2y^2 + zy^3$	$\Delta(a, b_0) \neq 0$	15	3
$V_{1,p}$	$x^2y + z^4 + bz^3y + z^2y^2 + ay^{4+p}$	$b^2 \neq 4$, $a_0 \neq 0$	$15+p$	3
$V_{1,2q-1}^{\#}$	$x^2y + z^3y + ay^2z^2 + y^4 + bxz^{2+q}$	$4a^3 + 27 \neq 0$, $b_0 \neq 0$	$14+2q$	3
$V_{1,2q}^{\#}$	$x^2y + z^3y + ay^2z^2 + y^4 + bz^{4+q}$	$4a^3 + 27 \neq 0$, $b_0 \neq 0$	$15+2q$	3

Ici $p > 0$, $q > 0$, $a = a_0 + a_1y$, $b = b_0 + b_1z$. Les singularités de la classe V^* vérifient les conditions

$$\mu(V^*) \geqslant 17, \quad m(V^*) \geqslant 3, \quad \text{codim } (V^*) = 13.$$

15.5. Autres singularités. Toutes les singularités dont les formes normales ne figurent pas dans les tableaux précédents appartiennent nécessairement à l'une des sept classes suivantes:

Nom	Corang	Adjacences	Définition	$c \geqslant$	$\mu \geqslant$	$m \geqslant$	Théorème
N	2	$N \to W_{13}$	$j_4 = 0$	12	16	3	47 à 49
S^*	3	$S_k^* \to S_{12k-7}$	v. th. 77	15	20	4	77 à 81
U^*	3	$U_k^* \to U_{12k-8}$	v. th. 90	14	20	5	90 à 96
V^*	3	$V^* \to V_{1,1} \cup V_{1,1}^{\#}$	v. th. 98	13	17	3	97 à 102
V'	3	$V' \to V$	$j_3 = x^3$	13	18	4	103
V''	3	$V'' \to V'$	$j_3 = 0$	16	27	10	104
O	>3	$O \to T_{4,4,4}$	corang $\geqslant 4$	10	16	5	105

Ici $k \geqslant 2$. Les numéros des théorèmes sont ceux du § 16. La forme normale pour les singularités de la classe O, à l'exception d'un ensemble de codimension $c = 11$, est celle-ci:

$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + (ax + by + cz + du)^3 + exyzu, \qquad \Delta(a, b, c, d) \neq 0,$$

où Δ est le discriminant.

15.6. Quelques adjacences. Seules seront indiquées dans ce n° les adjacences qui apparaissent naturellement au cours de la classification (voir § 16)*).

1. Singularités avec le nombre de modules $m = 0, 1, 2$.

1.0. *Quelques adjacences de singularités simples*:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A \leftarrow D \leftarrow & E_6 & \leftarrow & E_7 & \leftarrow & E_8, & & A = A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow A_3 \leftarrow A_4 \leftarrow \ldots \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & & & & & & (B) \\
& (P) & & (X) & & (J) & & D = D_4 \leftarrow D_5 \leftarrow D_6 \leftarrow \ldots \\
& & & & & & & \uparrow \\
& & & & & & & (E)
\end{array}$$

Les classes P, X, J sont constituées de singularités non simples. Toutes les décompositions des singularités simples ont été décrites par O. Lyashko dans [194], le cas réel est étudié par O. Tchislenko (1985).

1.1. *Quelques adjacences de singularités unimodales*:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & J_{10} = & T_{2,3,6} & \rightarrow & (E_8) \\
& & & \uparrow \\
\cdots \rightarrow & T_{2,3,8} & \rightarrow & T_{2,3,7} & \leftarrow & E_{12} & \leftarrow & E_{13} & \leftarrow & E_{14} & \leftarrow (J_3)
\end{array}$$

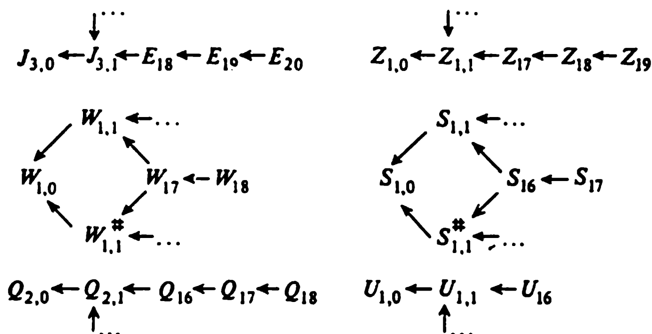
$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & X_9 = & T_{2,4,4} & \rightarrow & (E_7) \\
& & & \uparrow \\
\cdots \rightarrow & T_{2,4,6} & \rightarrow & T_{2,4,5} & \leftarrow & Z_{11} & \leftarrow & Z_{12} & \leftarrow & Z_{13} & \leftarrow (Z_1^1) \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\begin{smallmatrix}\cdots \rightarrow \\ \cdots \rightarrow\end{smallmatrix} & T_{2,5,6} & \rightarrow & T_{2,5,5} & \leftarrow & W_{12} & \leftarrow & W_{13} & \leftarrow & (W_{1,0};\, N)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & P_8 = & T_{3,3,3} & \rightarrow & (E_6) \\
& & & \uparrow \\
\cdots \rightarrow & T_{3,3,5} & \rightarrow & T_{3,3,4} & \leftarrow & Q_{10} & \leftarrow & Q_{11} & \leftarrow & Q_{12} & \leftarrow (Q_2) \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\begin{smallmatrix}\cdots \rightarrow \\ \cdots \rightarrow\end{smallmatrix} & T_{3,4,5} & \rightarrow & T_{3,4,4} & \leftarrow & S_{11} & \leftarrow & S_{12} & \leftarrow & (S_{1,0}) \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\begin{smallmatrix}\cdots \rightarrow \\ \cdots \rightarrow \\ \cdots \rightarrow\end{smallmatrix} & T_{4,4,5} & \rightarrow & T_{4,4,4} & \leftarrow & U_{12} & \leftarrow & (U_{1,0};\, V) \\
& & & \uparrow \\
& & & (O)
\end{array}$$

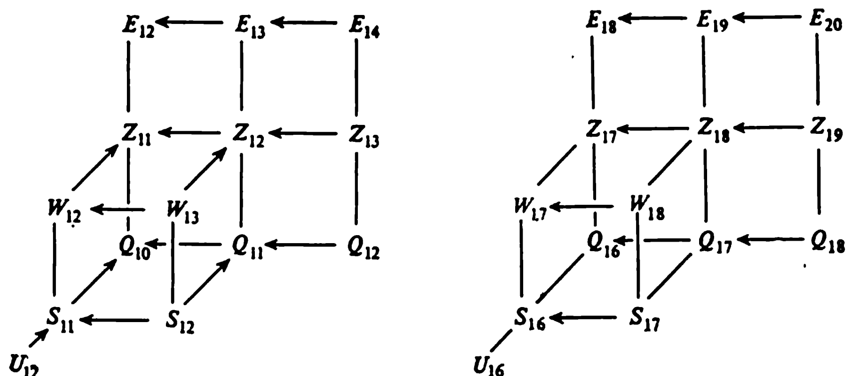
*) Ces adjacences ont la propriété suivante: l'adjacence de classes $K \leftarrow L$ exclut l'adjacence d'une sous-classe K' de K à une sous-classe L' de L (par exemple, $A \leftarrow D$ exclut $A_\mu \rightarrow D_4$). Une adjacence qui présente cette propriété est dite *adjacence forte*.

Les classes entre parenthèses sont celles dont la modalité est distincte de 1. Une liste complète des adjacences de toutes les singularités de modalité 1 a été établie par E. Brieskorn [67]. L'analyse des tableaux d'adjacence fait ressortir la semi-continuité du spectre de la singularité (de la suite $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_\mu$ des exposants de Steenbrink [269]). La liste des adjacences des singularités unimodales établie par Brieskorn contient exactement toutes les adjacences permises par l'hypothèse de la semi-continuité, à l'exception d'une seule: $Q_{11} \to J_{10}$. V. Goryunov a vérifié que pour toutes ces adjacences on a l'hypothèse (voir [29]) de semi-continuité du spectre de la singularité et que la condition de semi-continuité interdit toute adjacence à l'exception de celles citées par Brieskorn et encore de l'adjacence $Q_{11} \to J_{10}$, exclue par la semi-continuité des indices d'inertie de la forme d'intersections.

1.2. *Quelques adjacences de singularités bimodales*:



Voici les pyramides de singularités exceptionnelles de modalités 1 et 2:



Les segments verticaux relient les singularités qu'on déduit d'une même classe de Kodaira par la construction de V. Kulikov [176].

2. **Singularités de corang 2 avec le 4-jet non nul.**

2.1. *Singularités de corang 2 avec le 3-jet non nul*:

$$J = \leftarrow J_2 \leftarrow J_3 \leftarrow \dots$$

$$\begin{array}{l} J_k = \leftarrow J_{k,0} \leftarrow J_{k,1} \leftarrow E_{6k} \leftarrow E_{6k+1} \leftarrow E_{6k+2} \leftarrow (J_{k+1}) \\ \qquad\qquad\qquad\quad \uparrow \\ \qquad\qquad\quad\;\; J_{k,2} \leftarrow J_{k,3} \leftarrow \dots \end{array}$$

2.2. *Singularités de corang 2 avec le 3-jet nul et le 4-jet non nul.* Toutes les singularités indiquées forment une série infinie de classes

$$X = \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \dots ,$$

où

$$\begin{array}{ccccccc} & & & Y_k & & & \\ & & \swarrow & & \nwarrow & & \\ X_k = \leftarrow X_{k,0} \leftarrow & X_k^* & & & & W_k & \leftarrow (X_{k+1}). \\ & & \nwarrow & & \swarrow & & \\ & & & Z_k & & & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{l} X_k^* = \leftarrow X_{k,1} \leftarrow X_{k,2} \leftarrow \dots ,\quad Y_k = \leftarrow Y_{1,1}^k \leftarrow Y_{2,1}^k \leftleftarrows \dots ,. \\ Z_k = \leftarrow Z_0^k \leftarrow Z_1^k \leftarrow \dots ,\quad Z_0^k = \leftarrow Z_{12k-1}^k \leftarrow Z_{12k}^k \leftarrow Z_{12k+1}^k \leftarrow , \\ Z_i^k = \leftarrow Z_{i,0}^k \leftarrow Z_{i,1}^k \leftarrow Z_{12k+6i-1}^k \leftarrow Z_{12k+6i}^k \leftarrow Z_{12k+6i+1}^k \leftarrow (Z_{i+1}^k) \\ \qquad\qquad\qquad\;\; \uparrow \\ \qquad\qquad\quad Z_{i,2}^k \leftarrow Z_{i,3}^k \leftarrow \dots \quad (i>0) \end{array} ,$$

(Au-dessus de $X_{k,1}$: $\downarrow\downarrow$; au-dessus de $Y_{1,1}^k$: $\downarrow$; de $X_{k,1}$ vers Z_0^k : $\downarrow$.)

$$\begin{array}{ccccc} & & W_{k,1} \leftarrow W_{k,2} \leftarrow \dots & & \\ & \swarrow & & \nwarrow & \\ W_k = \leftarrow W_{12k} \leftarrow W_{12k+1} \leftarrow W_{k,0} & & & & W_{12k+5} \leftarrow W_{12k+6} \leftarrow (X_{k+1}) . \\ & \nwarrow & & \swarrow & \\ & & W_{k,1}^{\#} \leftarrow W_{k,2}^{\#} \leftarrow \dots & & \end{array}$$

3. Singularités de corang 3 avec le 3-jet réduit.

3.1. *Singularités de corang 3 avec le 3-jet* $x^3 + yz^2$:

$$Q = \leftarrow Q_1 \leftarrow Q_2 \leftarrow \ldots, \quad Q_1 = \leftarrow Q_{10} \leftarrow Q_{11} \leftarrow Q_{12} \leftarrow,$$

$$\begin{array}{llll} & Q_k = \leftarrow Q_{k,0} \leftarrow & Q_{k,1} \leftarrow Q_{6k+4} \leftarrow Q_{6k+5} \leftarrow Q_{6k+6} \leftarrow (Q_{k+1}). \\ & & \uparrow \\ (k>1) & & Q_{k,2} \leftarrow Q_{k,3} \leftarrow \ldots \end{array}$$

3.2. *Singularités de corang 3 avec le 3-jet* $x^2z + yz^2$:

$$S = \leftarrow S_1 \leftarrow S_2 \leftarrow \ldots,$$

où

$$\begin{array}{ccccc} & & S_{k,1} \leftarrow \ldots & & \\ & \swarrow & & \nwarrow & \\ S_k = \leftarrow S_{12k-1} \leftarrow S_{12k} \leftarrow S_{k,0} & & & & S_{12k+4} \leftarrow S_{12k+5} \leftarrow S^*_{k+1} \leftarrow (S_{k+1}). \\ & \nwarrow & & \swarrow & \\ & & S^*_{k,1} \leftarrow \ldots & & \end{array}$$

Les singularités S^*_k, $k > 1$, se répartissent en classes comme indiqué:

$$\begin{array}{ccccc} & & SQ_k & & \\ & \swarrow & & \nwarrow & \\ S^*_k = \leftarrow S^*_{k,0} \leftarrow SP_k & & & & (S_k) \\ & \nwarrow & & \swarrow & \\ & & SR_k & & \end{array}$$

3.3. *Singularités de corang 3 avec le 3-jet* $x^3 + xz^2$:

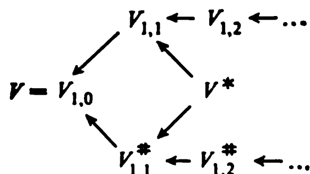
$$U = \leftarrow U_1 \leftarrow U_2 \leftarrow \ldots,$$

où

$$\begin{array}{lll} U_k = \leftarrow U_{12k} \leftarrow U_{k,0} \leftarrow & U_{k,1} & \leftarrow U_{12k+4} \leftarrow U^*_{k+1} \leftarrow (U_{k+1}) \\ & \uparrow & \\ & U_{k,2} \leftarrow \ldots & \end{array}$$

$$\begin{array}{lccc} U^*_k = \leftarrow U^*_{k,0} \leftarrow & UP_k \leftarrow & UR_k \leftarrow & UT_k \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & UQ_k \leftarrow & US_k \leftarrow & (U_k). \end{array}$$

4. Singularités de corang 3 avec le 3-jet x^2y:



§ 16. Clé d'identification des singularités

Les 105 théorèmes ci-après permettent d'identifier n'importe quelle singularité figurant dans les listes du § 15.

16.1. Notations.

f	= germe de fonction holomorphe en un point critique isolé 0 de multiplicité μ, ou sa série de Taylor en 0, ou série formelle de variables x, y ou x, y, z de μ fini ;
$f \sim g$	= germes ou séries f, g équivalents en 0 (il existe un germe de difféomorphisme ou une série h tel(le) que $f = g \circ h$) ;
$\Longrightarrow$	= implique ;
$\models\!\Rightarrow$	= voir (les renvois de la forme $\models\!\Rightarrow i$ ne font pas partie de l'énoncé du théorème mais renvoient au n° du théorème où sont classées les singularités de la classe considérée) ;
$j_k f$	= k-jet de la fonction f en 0 (ou polynôme de Taylor de degré k en 0) ;
$A, \dots, Z$	= classes d'équivalence stable de germes de fonctions définies au § 15 ;
$m(f)$	= modalité de f en 0 ;
$c(f)$	= codimension de la strate $\mu = $ Cte du germe de fonction f dans l'espace des germes de fonctions de point critique 0 et de valeur critique 0 ;
$c(K)$	= codimension de la classe K dans ce même espace ;
$j_{\{x^{m_i}\}} f$	= quasi-jet de f en 0 défini par les monômes x^{m_i} (ou polynôme de Taylor correspondant)*) ;

---

*) Un système de n monômes $\{x^{m_i}\}$ en $x_1, \dots, x_n$ à exposants indépendants $m_i \in Z^n \subset R^n$ définit un hyperplan $\Gamma \subset R^n$, $\Gamma = \{m: (\alpha, m) = 1\}$. Si toutes les composantes α_i du vecteur α sont positives, on dit que α est le *type de quasi-homogénéité* et la quantité (α, m) le *degré du monôme* x^m. Un polynôme $\Sigma f_m x^m$ est *quasi homogène de degré* $d \in Q$ *de type* α si $(\alpha, m) = d \ \forall m: f_m \neq 0$.

$j_{\{x^{m_i}\}} f \approx g$ = équivalence quasi homogène de jets ou de polynômes de Taylor;

j^*, φ = symbole figurant dans les théorèmes 58 à 65, 66 à 81, 82 à 89, 98 à 102 et expliqué avant le premier théorème de chaque groupe;

Δ = discriminant. Dans les théorèmes 36, 37, 47, 48, 98, 99

$$\Delta = 4\,(a^3 + b^3) + 27 - a^2b^2 - 18ab.$$

16.2. Clé d'identification des singularités.

1. $\mu\,(f) < \infty \Rightarrow$ un des quatre:

$$\begin{aligned} \text{corang } f &\leqslant 1 \mid\Longrightarrow 2;\\ &= 2 \mid\Longrightarrow 3;\\ &= 3 \mid\Longrightarrow 50;\\ &> 3 \mid\Longrightarrow 105. \end{aligned}$$

2. corang $f \leqslant 1 \Rightarrow f \in A_k$ $(k \geqslant 1)$.
Dans les théorèmes 3 à 49 $f \in \mathbf{C}\,[[x, y]]$.

3. $j^2 f = 0 \Rightarrow$ un des quatre:

$$\begin{aligned} j^3 f &\approx x^2y + y^3 &&\mid\Longrightarrow 4;\\ &\approx x^2y &&\mid\Longrightarrow 5;\\ &\approx x^3 &&\mid\Longrightarrow 6_1;\\ &= 0 &&\mid\Longrightarrow 13. \end{aligned}$$

4. $j^3 f = x^2y + y^3 \Longrightarrow f \in D_4$.

5. $j^3 f = x^2y \Longrightarrow f \in D_k$ $(k > 4)$.

Dans les théorèmes 6 à 9 le nombre $k \geqslant 1$.

6_k. $j_{x^3,\, y^{3k}} f\,(x,\, y) = x^3 \Longrightarrow$ un des quatre:

$$j_{x^3,\, y^{3k+1}} f \approx x^3 + y^{3k+1} \mid\Longrightarrow 7_k;$$

Le type de quasi-homogénéité définit dans l'algèbre $\mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ une *filtration décroissante d'algèbres* $A_0 \supset \ldots$,

$$A_d = \{f\colon (\alpha, m) \geqslant d\ \forall m\colon f_m \neq 0\}.$$

L'espace quotient $A_0/(\bigcup A_d,\ d > 1)$ est appelé *espace des quasi-jets* définis par les monômes $\{x^{m_i}\}$ (ou définis par le type de quasi-homogénéité α). Pour un système de coordonnées fixé, on peut identifier les quasi-jets avec les polynômes dont tous les monômes sont d'ordre non supérieur à 1 (i.e. dont les exposants appartiennent à Γ ou sont situés du même côté de Γ que 0).

Les *difféomorphismes quasi homogènes* sont des difféomorphismes de $\mathbf{C}^n$ qui conservent la graduation de l'algèbre $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Le groupe de Lie des difféomorphismes quasi homogènes opère sur les espaces de quasi-jets et sur les espaces de polynômes quasi homogènes. L'*équivalence quasi homogène* est l'appartenance à une même orbite de cette action.

$$j_{x^3,\,xy^{2k+1}}\, f \approx x^3 + xy^{2k+1} \mid\Longrightarrow 8_k;$$
$$j_{x^3,\,y^{3k+2}}\, f \approx x^3 + y^{3k+2} \mid\Longrightarrow 9_k;$$
$$j_{x^3,\,y^{3k+2}}\, f = x^3 \qquad \mid\Longrightarrow 10_{k+1}.$$

7_k. $j_{x^3,\,y^{3k+1}}\, f = x^3 + y^{3k+1} \Longrightarrow f \in E_{6k}$.

8_k. $j_{x^3,\,xy^{2k+1}}\, f = x^3 + xy^{2k+1} \Longrightarrow f \in E_{6k+1}$.

9_k. $j_{x^3,\,y^{3k+2}}\, f = x^3 + y^{3k+2} \Longrightarrow f \in E_{6k+2}$.

Dans les théorèmes 10 à 12 le nombre $k > 1$.

10_k. $j_{x^3,\,y^{3k-1}}\, f = x^3 \Longrightarrow$ un des trois:

$$j_{x^3,\,y^{3k}}\, f \approx x^3 + ax^2y^k + y^{3k},\quad 4a^3 + 27 \neq 0 \mid\Longrightarrow 11_k;$$
$$\approx x^3 + x^2y^k \qquad \mid\Longrightarrow 12_k;$$
$$\approx x^3 \qquad \mid\Longrightarrow 6_k.$$

11_k. $j_{x^3,\,y^{3k}}\, f = x^3 + ax^2y^k + y^{3k},\quad 4a^3 + 27 \neq 0 \Longrightarrow f \in J_{k,\,0}$.

12_k. $j_{x^3,\,y^{3k}}\, f = x^3 + x^2y^k \qquad \Longrightarrow f \in J_{k,\,p} \quad (p > 0)$.

Série X.

13. $j_3 f(x,\, y) = 0 \Longrightarrow$ un des six:

$$j^4 f \approx x^4 + ax^2y^2 + y^4,\quad a^2 \neq 4 \mid\Longrightarrow 14;$$
$$\approx x^4 + x^2y^2 \qquad \mid\Longrightarrow 15;$$
$$\approx x^2y^2 \qquad \mid\Longrightarrow 16;$$
$$\approx x^3y \qquad \mid\Longrightarrow 17;$$
$$\approx x^4 \qquad \mid\Longrightarrow 25;$$
$$= 0 \qquad \mid\Longrightarrow 47.$$

14. $j_4 f = x^4 + ax^2y^2 + y^4,\quad a^2 \neq 4 \Longrightarrow f \in X_9 = X_{1,\,0} = T_{2,\,4,\,4}$.

15. $j_4 f = x^4 + x^2y^2 \qquad \Longrightarrow f \in X_{1,\,p} = T_{2,\,4,\,4+p} \quad (p > 0)$.

16. $j_4 f = x^2y^2 \qquad \Longrightarrow f \in Y^1_{p,\,q} = T_{2,\,4+p,\,4+q}$
$(p \geqslant q > 0)$.

17. $j_4 f = x^3y \qquad \Longrightarrow j_{x^3y,\,y^4}\, f = x^3y \mid\Longrightarrow 18_1$.

Dans les théorèmes 18 à 21 le nombre $p \geqslant 1$.

18_p. $j_{x^3y,\,y^{3p+1}} f = x^3y \Longrightarrow$ un des quatre:

$$j_{x^3y,\,y^{3p+2}} f \approx x^3y + y^{3p+2} \mid\Longrightarrow 19_p;$$
$$j_{x^3y,\,xy^{2p+2}} f \approx x^3y + xy^{2p+2} \mid\Longrightarrow 20_p;$$
$$j_{x^3y,\,y^{3p+3}} f \approx x^3y + y^{3p+3} \mid\Longrightarrow 21_p;$$
$$j_{x^3y,\,y^{3p+3}} f = x^3y \qquad \mid\Longrightarrow 22_{p+1}.$$

$19_p. j_{x^3y,\, y^{3p+2}} f = x^3y + y^{3p+2} \Longrightarrow f \in Z_{6p+5}.$

$20_p. j_{x^3y,\, xy^{2p+2}} f = x^3y + xy^{2p+2} \Longrightarrow f \in Z_{6p+6}.$

$21_p. j_{x^3y,\, y^{3p+3}} f = x^3y + y^{3p+3} \Longrightarrow f \in Z_{6p+7}.$

Dans les théorèmes 22 à 24 le nombre $p > 1$.

$22_p. j_{x^3y,\, y^{3p}} f = x^3y \Longrightarrow$ un des trois :

$$j_{x^3y,\, y^{3p+1}} f \approx y(x^3 + bx^2y^p + y^{3p}), \quad 4b^3 + 27 \neq 0 \,|\!\Longrightarrow 23_p;$$
$$\approx y(x^3 + x^2y^p) \quad |\!\Longrightarrow 24_p;$$
$$\approx x^3y \quad |\!\Longrightarrow 18_p.$$

$23_p.\ j_{x^3y,\, y^{3p+1}} f = y(x^3 + bx^2y^p + y^{3p}),\ 4b^3 + 27 \neq 0 \Longrightarrow f \in Z_{p-1,\, 0}.$

$24_p.\ j_{x^3y,\, y^{3p+1}} f = y(x^3 + x^2y^p) \Longrightarrow f \in Z_{p-1,\, r}\ (r > 0).$

Série W.

$25.\ j_4 f(x, y) = x^4 \Longrightarrow j_{x^4,\, y^4} f = x^4 \,|\!\Longrightarrow 26_1.$

Dans les théorèmes 26 à 34 le nombre $k \geqslant 1$.

$26_k.\ j_{x^4,\, y^{4k}} f = x^4 \Rightarrow$ un des trois :

$$j_{x^4,\, y^{4k+1}} f \approx x^4 + y^{4k+1} \quad |\!\Longrightarrow 27_k;$$
$$j_{x^4,\, xy^{3k+1}} f \approx x^4 + xy^{3k+1} \,|\!\Longrightarrow 28_k;$$
$$j_{x^4,\, xy^{3k+1}} f \approx x^4 \quad |\!\Longrightarrow 29_k.$$

$27_k.\ j_{x^4,\, y^{4k+1}} f = x^4 + y^{4k+1} \Longrightarrow f \in W_{12k}.$

$28_k.\ j_{x^4,\, xy^{3k+1}} f = x^4 + xy^{3k+1} \Longrightarrow f \in W_{12k+1}.$

$29_k.\ j_{x^4,\, xy^{3k+1}} f = x^4 \Longrightarrow$ un des quatre :

$$j_{x^4,\, y^{4k+2}} f \approx x^4 + bx^2y^{2k+1} + y^{4k+2},\ b^2 \neq 4 \,|\!\Longrightarrow 30_k;$$
$$\approx x^4 + x^2y^{2k+1} \quad |\!\Longrightarrow 31_k;$$
$$\approx (x^2 + y^{2k+1})^2 \quad |\!\Longrightarrow 32_k;$$
$$\approx x^4 \quad |\!\Longrightarrow 33_k.$$

$30_k.\ j_{x^4,\, y^{4k+2}} f = x^4 + bx^2y^{2k+1} + y^{4k+2},\ b^2 \neq 4 \Longrightarrow f \in W_{k,\, 0}.$

$31_k.\ j_{x^4,\, y^{4k+2}} f = x^4 + x^2y^{2k+1} \quad \Longrightarrow f \in W_{k,\, i}\ (i > 0).$

$32_k.\ j_{x^4,\, y^{4k+2}} f = (x^2 + y^{2k+1})^2 \quad \Longrightarrow f \in W^{\#}_{k,\, i}\ (i > 0).$

$33_k.\ j_{x^4,\, y^{4k+2}} f = x^4 \Longrightarrow$ un des trois :

$$j_{x^4,\, xy^{3k+2}} f \approx x^4 + xy^{3k+2} \,|\!\Longrightarrow 34_k;$$
$$j_{x^4,\, y^{4k+3}} f \approx x^4 + y^{4k+3} \quad |\!\Longrightarrow 35_k;$$
$$j_{x^4,\, y^{4k+3}} f = x^4 \quad |\!\Longrightarrow 36_{k+1}.$$

34_k. $j_{x^4,\, xy^{3k+2}} f = x^4 + xy^{3k+2} \Longrightarrow f \in W_{12k+5}$.

35_k. $j_{x^4,\, y^{4k+3}} f = x^4 + y^{4k+3} \Longrightarrow f \in W_{12k+6}$.

Dans les théorèmes 36 à 46 le nombre $k > 1$.

Série X_k.

36_k. $j_{x^4,\, y^{4k-1}} f = x^4 \Longrightarrow$ un des cinq :

$$\begin{aligned} j_{x^4,\, y^{4k}} f &\approx x^4 + bx^3y^k + ax^2y^{2k} + xy^{3k},\ \Delta \neq 0,\ ab \neq 9 &&|\Longrightarrow 37_k; \\ &\approx x^2(x^2 + axy^k + y^{2k}),\ a^2 \neq 4 &&|\Longrightarrow 38_k; \\ &\approx x^2(x + y^k)^2 &&|\Longrightarrow 39_k; \\ &\approx x^3(x + y^k) &&|\Longrightarrow 40_k; \\ &\approx x^4 &&|\Longrightarrow 26_k. \end{aligned}$$

37_k. $j_{x^4,\, y^{4k}} f = x^4 + bx^3y^k + ax^2y^{2k} + xy^{3k}$, $\Delta \neq 0$, $ab \neq 9 \Longrightarrow f \in X_{k,\,0}$.

38_k. $j_{x^4,\, y^{4k}} f = x^2(x^2 + axy^k + y^{2k})$, $a^2 \neq 4 \Longrightarrow f \in X_{k,\,p}$ $(p > 0)$.

39_k. $j_{x^4,\, y^{4k}} f = x^2(x + y^k)^2 \Longrightarrow f \in Y^k_{r,\,s}$ $(1 \leqslant s \leqslant r)$.

40_k. $j_{x^4,\, y^{4k}} f = x^3(x + y^k) \Longrightarrow f \sim f_1 f_2$, où

$$j_{x,\, y^k} f_1 \approx x + y^k,\quad j_{x^3,\, y^{3k}} f_2 = x^3 \,|\Longrightarrow 41_k.$$

Dans les théorèmes 41 à 44 $i \geqslant 0$, $p > 0$.

41_k. $j_{x^3,\, y^{3k}} f_2 = x^3 \Longrightarrow$ un des cinq :

$$\begin{aligned} f_2 &\in E_{6(k+i)} &&|\Longrightarrow 42_{k,\,i}; \\ f_2 &\in E_{6(k+i)+1} &&|\Longrightarrow 43_{k,\,i}; \\ f_2 &\in E_{6(k+i)+2} &&|\Longrightarrow 44_{k,\,i}; \\ f_2 &\in J_{k+i+1,\,0} &&|\Longrightarrow 45_{k,\,i+1}; \\ f_2 &\in J_{k+i+1,\,p} &&|\Longrightarrow 46_{k,\,i+1,\,p}. \end{aligned}$$

Dans les théorèmes 42 à 46 $f(x, y) = f_1 f_2$, où

$$j_{x,\, y^k} f_1 \approx x + y^k,\quad j_{x^3,\, y^{3k}} f_2 = x^3.$$

$42_{k,\,i}$. $f_2 \in E_{6(k+i)} \Longrightarrow f \in Z^k_{12k+6i-1}$.

$43_{k,\,i}$. $f_2 \in E_{6(k+i)+1} \Longrightarrow f \in Z^k_{12k+6i}$.

$44_{k,\,i}$. $f_2 \in E_{6(k+i)+2} \Longrightarrow f \in Z^k_{12k+6i+1}$.

Dans les théorèmes 45, 46 les nombres $i \geqslant 1$, $p > 0$.

$45_{k,\,i}$. $f_2 \in J_{k+i,\,0} \Longrightarrow f \in Z^k_{i,\,0}$.

$46_{k,\,i,\,p}$. $f_2 \in J_{k+i,\,p} \Longrightarrow f \in Z^k_{i,\,p}$.

47. $j_4 f = 0 \Longrightarrow$ un des deux :
$j_5 f \approx x^4 y + a x^3 y^2 + b x^2 y^3 + x y^4$, $\Delta \neq 0$, $ab \neq 9 \mid\Longrightarrow 48$;
$j_5 f$ dégénéré $\mid\Longrightarrow 49$.

48. $j_5 f = x^4 y + a x^3 y^2 + b x^2 y^3 + x y^4$, $\Delta \neq 0 \Rightarrow f \in N_{16}$, i. e. $f \sim x^4 y + a x^3 y^2 + b x^2 y^3 + x y^4 + c x^3 y^3$, $\Delta \neq 0$, $ab \neq 9$; $\mu(f) = 16$, $m(f) = 3$, $c(f) = 12$.

49. $j_5 f$ dégénéré $\Rightarrow \mu(f) > 16$, $m(f) > 2$, $c(f) > 12$.

Singularités de corang 3

Dans les théorèmes 50 à 104 $f \in \mathbf{C}[[x, y, z]]$.

50. $j_2 f(x, y, z) = 0 \Rightarrow$ un des dix :

$$
\begin{array}{lll}
j_3 f \approx x^3 + y^3 + z^3 + axyz, \ a^3 + 27 \neq 0 & \mid\Longrightarrow 51 ; & \\
\quad \approx x^3 + y^3 + xyz & \mid\Longrightarrow 52 & \text{(série } P\text{)} ; \\
\quad \approx x^3 + xyz & \mid\Longrightarrow 54 & \text{(série } R\text{)} ; \\
\quad \approx xyz & \mid\Longrightarrow 56 & \text{(série } T\text{)} ; \\
\quad \approx x^3 + yz^2 & \mid\Longrightarrow 58 & \text{(série } Q\text{)} ; \\
\quad \approx x^2 z + yz^2 & \mid\Longrightarrow 66 & \text{(série } S\text{)} ; \\
\quad \approx x^3 + xz^2 & \mid\Longrightarrow 82 & \text{(série } U\text{)} ; \\
\quad \approx x^2 y & \mid\Longrightarrow 97 & \text{(classe } V\text{)} ; \\
\quad \approx x^3 & \mid\Longrightarrow 103 ; & \\
\quad = 0 & \mid\Longrightarrow 104. &
\end{array}
$$

Série T.

51. $j_3 f = x^3 + y^3 + z^3 + axyz$, $a^3 + 27 \neq 0 \Longrightarrow f \in P_8 = T_{3,3,3}$.

52. $j_3 f = x^3 + y^3 + xyz \Longrightarrow f \sim x^3 + y^3 + xyz + \alpha(z)$, $j_3(\alpha) = 0 \mid\Longrightarrow 53$.

53. $f = x^3 + y^3 + xyz + \alpha(z)$, $j_3(\alpha) = 0 \Longrightarrow f \in P_{p+5} = T_{3,3,p}$ $(p > 3)$.

54. $j_3 f = x^3 + xyz \Longrightarrow f \sim x^3 + xyz + \alpha(y) + \beta(z)$, $j_3(\alpha, \beta) = 0 \mid\Longrightarrow 55$.

55. $f = x^3 + xyz + \alpha(y) + \beta(z)$, $j_3(\alpha + \beta) = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow f \in R_{p,q} = T_{3,p,q}$ $(q \geqslant p > 3)$.

56. $j_3 f = xyz \Longrightarrow f \sim xyz + \alpha(x) + \beta(y) + \gamma(z)$,
$j_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \mid\Longrightarrow 57$.

57. $f = xyz + \alpha(x) + \beta(y) + \gamma(z)$, $j_3(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow f \in T_{p,q,r}$ $(r \geqslant q \geqslant p > 3)$.

Série Q.

Dans les théorèmes 58 à 65 $\varphi = x^3 + yz^2$, $j_\lambda^* = j_{yz^3, x^3, \lambda}$ (λ est un monôme).

58. $j_3 f = \varphi \Rightarrow f = \varphi + \alpha(y) + x\beta(y),\ j_3(\alpha + x\beta) = 0 \models\!\!\Rightarrow 59_1$.

Dans les théorèmes 59 à 62 le nombre $k \geqslant 1$.

59_k. $f = \varphi + \alpha(y) + x\beta(y),\ j^*_{y^{3k}} f = \varphi \Rightarrow$ un des quatre:

$$j^*_{y^{3k+1}} f \approx \varphi + y^{3k+1} \models\!\!\Rightarrow 60_k;$$
$$j^*_{xy^{2k+1}} f \approx \varphi + xy^{2k+1} \models\!\!\Rightarrow 61_k;$$
$$j^*_{y^{3k+2}} f \approx \varphi + y^{3k+2} \models\!\!\Rightarrow 62_k;$$
$$j^*_{y^{3k+2}} f = \varphi \models\!\!\Rightarrow 63_{k+1}.$$

60_k. $j^*_{y^{3k+1}} f = \varphi + y^{3k+1} \Rightarrow f \in Q_{6k+4}$.

61_k. $j^*_{xy^{2k+1}} f = \varphi + xy^{2k+1} \Rightarrow f \in Q_{6k+5}$.

62_k. $j^*_{y^{3k+2}} f = \varphi + y^{3k+2} \Rightarrow f \in Q_{6k+6}$.

Dans les théorèmes 63 à 65 le nombre $k > 1$.

63_k. $f = \varphi + \alpha(y) + x\beta(y),\ j^*_{y^{3k-1}} f = \varphi \Rightarrow$ un des trois:

$$j^*_{y^{3k}} f \approx \varphi + ax^2y^k + xy^{2k},\ a^2 \neq 4 \models\!\!\Rightarrow 64_k;$$
$$\approx \varphi + x^2y^k \models\!\!\Rightarrow 65_k;$$
$$= \varphi \models\!\!\Rightarrow 59_k.$$

64_k. $j^*_{y^{3k}} f = \varphi + ax^2y^k + xy^{2k},\ a^2 \neq 4 \Rightarrow f \in Q_{k,0}$.

65_k. $j^*_{y^{3k}} f = \varphi + x^2y^k \Rightarrow f \in Q_{k,i}\ (i > 0)$.

Série S.

Dans les théorèmes 66 à 81 $\varphi = x^2z + yz^2$, $j^*_\lambda = j_{x^2z,\, yz^2,\, \lambda}$ (λ est un monôme).

66. $j_3 f = \varphi \Rightarrow f \sim \varphi + \alpha(y) + x\beta(y) + z\gamma(y)$,

$$j_3(\alpha + x\beta + z\gamma) = 0 \models\!\!\Rightarrow 67_1.$$

Dans les théorèmes 67 à 76 le nombre $k \geqslant 1$.

67_k. $f = \varphi + \alpha(y) + x\beta(y) + z\gamma(y),\ j^*_{y^{4k-1}} f = \varphi \Rightarrow$ un des trois:

$$j^*_{y^{4k}} f \approx \varphi + y^{4k} \models\!\!\Rightarrow 68_k;$$
$$j^*_{xy^{3k}} f \approx \varphi + xy^{3k} \models\!\!\Rightarrow 69_k;$$
$$j^*_{xy^{3k}} f = \varphi \models\!\!\Rightarrow 70_k.$$

68_k. $j^*_{y^{4k}} f = \varphi + y^{4k} \Rightarrow f \in S_{12k-1}$.

69_k. $j^*_{xy^{3k}} f = \varphi + xy^{3k} \Rightarrow f \in S_{12k}$.

70_k. $f=\varphi+\alpha(y)+x\beta(y)+z\gamma(y)$, $j^*_{xy^{3k}}f=\varphi \Longrightarrow$ un des quatre:

$$j^*_{y^{4k+1}}f \approx \varphi+y^{4k+1}+bzy^{2k+1},\quad b^2\neq 4 \mid\Longrightarrow 71_k\ ;$$
$$\approx \varphi+x^2y^{2k} \quad \mid\Longrightarrow 72_k\ ;$$
$$\approx \varphi+zy^{2k+1} \quad \mid\Longrightarrow 73_k\ ;$$
$$=\varphi \quad \mid\Longrightarrow 74_k.$$

71_k. $j^*_{y^{4k+1}}f=\varphi+y^{4k+1}+bzy^{2k+1}$, $b^2\neq 4 \Longrightarrow f\in S_{k,\,0}$.

72_k. $j^*_{y^{4k+1}}f=\varphi+x^2y^{2k} \Longrightarrow f\in S_{k,\,i}$ $(i>0)$.

73_k. $j^*_{y^{4k+1}}f=\varphi+zy^{2k+1} \Longrightarrow f\in S^{\#}_{k,\,i}$ $(i>0)$.

74_k. $f=\varphi+\alpha(y)+x\beta(y)+z\gamma(y)$, $j^*_{y^{4k+1}}f=\varphi \Longrightarrow$ un des trois:

$$j^*_{xy^{3k+1}}f=\varphi+xy^{3k+1} \mid\Longrightarrow 75_k\ ;$$
$$j^*_{y^{4k+2}}f=\varphi+y^{4k+2} \mid\Longrightarrow 76_k\ ;$$
$$j^*_{y^{4k+2}}f=\varphi \mid\Longrightarrow 77_{k+1}.$$

75_k. $f^*_{xy^{3k+1}}f=\varphi+xy^{3k+1} \Longrightarrow f\in S_{12k+4}$.

76_k. $j^*_{y^{4k+2}}f=\varphi+y^{4k+2} \Longrightarrow f\in S_{12k+5}$.

Dans les théorèmes 77 à 81 le nombre $k>1$.

77_k. $f=\varphi+\alpha(y)+x\beta(y)+z\gamma(y)$, $j^*_{y^{4k-2}}f=\varphi \Longrightarrow$ un des cinq:

$$j^*_{y^{4k-1}}f \approx \varphi+ax^2y^{2k-1}+bxy^kz+xy^{3k-1},\quad \Delta\neq 0 \mid\Longrightarrow 78_k\ ;$$
$$\approx \varphi+xy^kz+ax^3y^{k-1}.\quad a^2\neq a \mid\Longrightarrow 79_k\ ;$$
$$\approx \varphi+x^3y^{k-1} \quad \mid\Longrightarrow 80_k\ ;$$
$$\approx \varphi+xy^kz \quad \mid\Longrightarrow 81_k\ ;$$
$$=\varphi \quad \mid\Longrightarrow 67_k.$$

78_k. $j^*_{y^{4k-1}}f=\varphi+ax^2y^{2k-1}+bxy^kz+xy^{3k-1}$, $\Delta\neq 0 \Longrightarrow f\in S^*_{k,\,0}$;

$$\mu(f)=12k-4,\quad m(f)\geqslant 3k-2,\quad c(S^*_{k,\,0})=9k-3.$$

79_k. $j^*_{y^{4k-1}}f=\varphi+xy^kz+ax^3y^{k-1}$, $a^2\neq a \Longrightarrow f\in SP_k$;

$$\mu(f)\geqslant 12k-3,\quad m(f)\geqslant 3k-2,\quad c(SP_k)=9k-2.$$

80_k. $j^*_{y^{4k-1}}f=\varphi+x^3y^{k-1} \Longrightarrow f\in SQ_k$;

$$\mu(f)\geqslant 12k-2,\quad m(f)\geqslant 3k-2,\quad c(SQ_k)=9k-1.$$

81_k. $j^*_{y^{4k-1}}f=\varphi+xy^kz \Longrightarrow f\in SR_k$;

$$\mu(f)\geqslant 12k-2,\quad m(f)\geqslant 3k-2,\quad c(SR_k)=9k-1.$$

Série U.

Dans les théorèmes 82 à 89

$\varphi = x^3 + xz^2$, $j^*_\lambda = j_{x^3,\, z^3,\, \lambda}$ (λ est un monôme).

82. $j_3 f = \varphi \Longrightarrow f \sim \varphi + \alpha(y) + x\beta(y) + z\gamma(y) + x^2\delta(y)$,

$$j_3(\alpha + x\beta + z\gamma + x^2\delta) = 0 \mid\!\Longrightarrow 83_1.$$

Dans les théorèmes 83 à 89 le nombre $k \geqslant 1$.

83_k. $f = \varphi + \alpha(y) + x\beta(y) + z\gamma(y) + x^2\delta(y)$, $j^*_{y^{3k}} f = \varphi \Longrightarrow$ un des deux :

$$j^*_{y^{3k+1}} f \approx \varphi + y^{3k+1} \mid\!\Longrightarrow 84_k\,;$$
$$= \varphi \mid\!\Longrightarrow 85_k.$$

84_k. $j^*_{y^{3k+1}} f = \varphi + y^{3k+1} \Longrightarrow f \in U_{12k}$.

85_k. $f = \varphi + \alpha(y) + x\beta(y) + z\gamma(y) + x^2\delta(y)$, $j^*_{y^{3k+1}} f = \varphi \Longrightarrow$ un des trois:

$$j^*_{xy^{2k+1}} f \approx \varphi + xy^{2k+1} + czy^{2k+1},\quad c(c^2+1) \neq 0 \mid\!\Longrightarrow 86_k\,;$$
$$\approx \varphi + xy^{2k+1} \mid\!\Longrightarrow 87_k\,;$$
$$= \varphi \mid\!\Longrightarrow 88_k.$$

86_k. $j^*_{xy^{2k+1}} f = \varphi + xy^{2k+1} + czy^{2k+1}$, $c(c^2+1) \neq 0 \Longrightarrow f \in U_{k,\,0}$.

87_k. $j^*_{xy^{2k+1}} f = \varphi + xy^{2k+1} \Longrightarrow f \in U_{k,\,p}$ $(p > 0)$.

88_k. $f = \varphi + \alpha(y) + x\beta(y) + z\gamma(y) + x^2\delta(y)$, $j^*_{xy^{2k+1}} f = \varphi \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ un des deux:

$$j^*_{y^{3k+2}} f \approx \varphi + y^{3k+2} \mid\!\Longrightarrow 89_k\,;$$
$$= \varphi \mid\!\Longrightarrow 90_{k+1}.$$

89_k. $j^*_{y^{3k+2}} f = \varphi + y^{3k+2} \Longrightarrow f \in U_{12k+4}$

Dans les théorèmes 90 à 96 le nombre $k \geqslant 2$,

$\varphi = x^2z + xz^2$, $j^*_\lambda = j_{x^3,\, z^3,\, \lambda}$ (λ est un monôme).

90_k. $f = x^3 + xz^2 + \alpha(y) + x\beta(y) + z\gamma(y) + x^2\delta(y)$, $j^*_{y^{3k-1}} f =$
$= x^3 + xz^2 \Longrightarrow$ un des sept:

$$j^*_{y^{3k}} f \approx \varphi + ax^2y^k + bxy^kz + y^kz^2 + cxy^{2k},\quad \Delta \neq 0 \mid\!\Longrightarrow 91_k\,;$$
$$\approx \varphi + ax^2y^k + bxy^kz + y^kz^2,\quad 4a \neq b^2,\quad a(a+1-b) \neq 0 \mid\!\Longrightarrow 92_k\,;$$
$$\approx x^3 + ax^2z + xz^2 + y^kz^2,\quad a^2 \neq 4 \mid\!\Longrightarrow 93_k\,;$$

$\approx \varphi + x^2y^k + axy^kz,$ $\qquad a^2 \neq a \;|\!\Longrightarrow 94_k;$

$\approx \varphi + x^2y^k$ $\qquad |\!\Longrightarrow 95_k;$

$\approx \varphi + xy^kz$ $\qquad |\!\Longrightarrow 96_k;$

$= \varphi$ $\qquad |\!\Longrightarrow 83_k.$

91_k. $j^*_{y^{3k}}f = \varphi + ax^2y^k + bxy^kz + y^kz^2 + cxy^{2k}.\quad \Delta \neq 0 \Longrightarrow f \in U^*_{k,0};$

$\mu(f) = 12k-4,\quad m(f) \geqslant 4k-3,\quad c(U^*_{k,0}) = 8k-2.$

92_k. $j^*_{y^{3k}}f = \varphi + ax^2y^k + bxy^kz + y^kz^2.\quad 4a \neq b^2,\quad a(a+1-b) \neq$

$\neq 0 \Longrightarrow f \in UP_k;$

$\mu(f) \geqslant 12k-3,\quad m(f) \geqslant 4k-3,\quad c(UP_k) = 8k-1.$

93_k. $j^*_{y^{3k}}f = x^3 + ax^2z + xz^2 + y^kz^2,\quad a^2 \neq 4 \Longrightarrow f \in UQ_k;$

$\mu(f) \geqslant 12k-2,\quad m(f) \geqslant 4k-3,\quad c(UQ_k) = 8k.$

94_k. $j^*_{y^{3k}}f = \varphi + x^2y^k + axy^kz,\qquad a^2 \neq a \Longrightarrow f \in UR_k;$

$\mu(f) \geqslant 12k-2,\quad m(f) \geqslant 4k-3,\quad c(UR_k) = 8k.$

95_k. $j^*_{y^{3k}}f = \varphi + x^2y^k \qquad \Longrightarrow f \in US_k;$

$\mu(f) = 12k-1,\quad m(f) \geqslant 4k-3,\quad c(US_k) = 8k+1.$

96_k. $j^*_{y^{3k}}f = \varphi + xy^kz \qquad \Longrightarrow f \in UT_k;$

$\mu(f) \geqslant 12k-1,\quad m(f) \geqslant 4k-3,\quad c(UT_k) = 8k+1.$

Classe V

97. $j_3f(x, y, z) = x^2y \Longrightarrow f \approx x^2y + \alpha(y, z) + x\beta(z).$

$j_3(\alpha) = j_3(\beta) = 0 \;|\!\Longrightarrow 98.$

Dans les théorèmes 98 et 102 φ est un des dix polynômes:
$z^4 + z^3y,\; z^3y + z^2y^2,\; z^2y^2 + zy^3,\; z^4 + z^2y^2,\; z^4,\; z^3y,\; z^2y^2,\; zy^3,\; y^4,\; 0.$

98. $f = x^2y + \alpha(y, z) + x\beta(z).\quad j_3f = x^2y \Longrightarrow$ un des quatre:

$j_{x^2y,\, y^4,\, z^4} f \approx x^2y + z^4 + az^3y + bz^2y^2 + zy^3,\; \Delta \neq 0,\quad ab \neq 9 \;|\!\Longrightarrow 99;$

$\approx x^2y + z^4 + bz^3y + z^2y^2,\quad b^2 \neq 4 \qquad |\!\Longrightarrow 100;$

$\approx x^2y + z^3y + az^2y^2 + y^4.\quad 4a^3 + 27 \neq 0 \qquad |\!\Longrightarrow 101;$

$\approx x^2y + \varphi \qquad |\!\Longrightarrow 102.$

99. $j_{x^2y,\, y^4,\, z^4}f = x^2y + z^4 + az^3y + bz^2y^2 + zy^3.\quad \Delta \neq 0 \Longrightarrow f \in V_{1,0}.$

100. $j_{x^2y,\, y^4,\, z^4} f = x^2y + z^4 + bz^3y + z^2y^2,\quad b^2 \neq 4 \Longrightarrow f \in V_{1,p},$

$p > 0.$

101. $j_{x^2y,\, y^4,\, z^4}f = x^2y + z^3y + az^2y^2 + y^4.\quad 4a^3 + 27 \neq 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f \in V^{\#}_{1,p},\quad p > 0.$

102. $j_{x^2y,\, y^4,\, z^4} f = x^2y + \varphi \Rightarrow \mu(f) \geqslant 17, \quad m(f) \geqslant 3, \quad c(f) \geqslant 13.$

103. $j_3 f(x, y, z) = x^3 \Rightarrow \mu(f) \geqslant 18, \quad m(f) \geqslant 4, \quad c(f) \geqslant 13.$

104. $j_3 f(x, y, z) = 0 \Rightarrow \mu(f) \geqslant 27, \quad m(f) \geqslant 10, \quad c(f) \geqslant 16.$

105. $\operatorname{corang} f > 3 \Rightarrow \mu(f) > 16, \quad m(f) \geqslant 5, \quad c(f) \geqslant 10.$

16.3. Démonstrations. Les théorèmes **1**, **17** et **25** sont immédiats. Les théorèmes **6**, **18**, **26**, **33**, **59**, **67**, **74**, **83**, **88** se démontrent par la méthode de rotation de la règle de Newton (cf. n° 11.2; pour plus de détails, nous renvoyons à [16]). Les théorèmes **3**, **10**, **13**, **22**, **29**, **36**, **47**, **50**, **52**, **54**, **56**, **58**, **63**, **66**, **70**, **77**, **82**, **85**, **90**, **97**, **98** établissent les formes normales des singularités quasi homogènes; la technique des racines pour l'obtention de ces formes a été décrite au § 13 (pour plus de détails voir toujours [16]).

La méthode développée dans le § 13 réduit la démonstration de ces théorèmes aux problèmes géométriques de classification énumérés dans le tableau suivant:

n° du théorème	Série	Problème géométrique
3	*D*	Classification linéaire des 3-formes dans C^2
10, 22	*J*, *Z*	Classification affine des triples de points dans C^1
13	*X*	Classification linéaire des 4-formes dans C^2
29	*W*	Classification linéaire des couples de points dans C^1
36	*X*	Classification affine des quadruples de points dans C^1
47	*N*	Classification linéaire des 5-formes dans C^2
50	*P*	Classification linéaire des 3-formes dans C^3
63	*Q*	Classification affine des courbes cubiques à point de rebroussement à distance finie dans C^2
70	*S*	Classification affine des courbes cubiques réductibles ayant au moins deux points doubles à distance finie dans C^2
77	*S**	Classification affine des courbes cubiques dans C^2 ayant une droite à l'infini pour tangente simple
85	*U*	Classification affine des courbes cubiques à symétrie centrale dans C^2 ayant exactement trois points à l'infini
90	*U**	Classification affine des courbes cubiques ayant exactement trois points à l'infini dans C^2
98	*V*	Classification affine des polynômes de degré $\leqslant 4$ d'une variable dans C^1

Le théorème **50** décrit la stratification suivant les singularités de l'espace des formes cubiques de dimension dix représentée sur la figure 54 (cf. [245]).

Les théorèmes **2**, **4**, **5**, **7**, **8**, **9**, **11**, **14**, **19**, **20**, **21**, **23**, **27**, **28**, **30**, **34**, **35**, **37**, **48**, **51**, **60**, **61**, **62**, **64**, **68**, **69**, **71**, **75**, **76**, **78**, **84**, **86**, **89**, **91**, **99** sont des conséquences du théorème de la forme normale des singularités semi-quasi homogènes (n° 12.6). Pour plus de détails, voir [16].

Les théorèmes **12_2, 15, 16, 53, 55, 57** se démontrent par la technique des mots croisés (§ 12) ; pour plus de détails voir [16].

Nom	Codimension	Courbe
P_8	0	
P_9	1	
Q, R	2	
S, T	3	
U	4	
V	5	
V'	7	
V''	10	

Fig. 54

Les théorèmes **49, 102 à 105** se prouvent également par les méthodes exposées au § 12.

Les démonstrations des théorèmes 12_k $(k > 2)$, **24, 31, 32, 38 à 46, 65, 72, 73, 79, 80, 81, 87, 92 à 96, 100, 101** utilisent la suite spectrale du § 14 (pour plus de détails, nous renvoyons à [20]).

Démonstration du théorème de classification des singularités simples.

1° *Toute singularité ou bien appartient à la liste des singularités simples du n°* 15.1.0 (p. 206), *ou bien est adjacente à l'une des classes* P_8, X_9, J_{10} (nous dirons que ces trois classes *confinent les singularités simples*).

Ceci découle des théorèmes **1** à **5**, $\mathbf{6_1}$ à $\mathbf{11_1}$, **13, 14, 50, 51** ; des théorèmes $\mathbf{10_1}$, **13** et **50** on ne prend que le premier cas.

2° *La modalité des singularités de chacune des trois classes confinantes est* $\geqslant 1$.

Cela ressort du fait que la modalité intérieure de ces singularités est égale à 1. Le sens géométrique de cette proposition est le suivant : une courbe cubique dans CP^2, un quadruple de droites passant par 0 dans C^2 et un triple de paraboles tangentes en un point dans C^2 ont des modules (pour les actions du groupe projectif, du groupe linéaire et du groupe des 2-jets de difféomorphismes respectivement). Par exemple, le module du quadruple de droites est leur birapport.

3° *Les singularités de la liste ne sont pas adjacentes aux classes confinantes.*

P_8 est de corang 3, X_9 est équivalent à une fonction de deux variables avec le 3-jet nul. Les fonctions de deux variables de notre liste sont de corang $\leqslant 2$ et ont leur 3-jet non nul, donc les adjacences

à P_8 et à X_9 sont exclues. Les adjacences à J_{10} sont exclues par la démonstration du théorème 6_1.

Il ressort de 1°, 2°, 3° que toutes les singularités de la liste, et elles seules, sont simples.

Démonstration du théorème de classification des singularités unimodales.

1° *Toute singularité non simple ou bien appartient à la liste des singularités unimodales du n° 15.1.1 (p. 206), ou bien est adjacente à l'une des neuf classes de singularités suivantes*: $J_{3,0}$, $W_{1,0}$, $Z_{1,0}$, N, $Q_{2,0}$, $S_{1,0}$, $U_{1,0}$, V, O (nous dirons que ces neuf classes sont *confinantes pour les singularités unimodales*).

La démonstration découle des théorèmes 1 à 5, $6_{1,2}$ à $9_{1,2}$, 10_2, 11_2, 13 à 17, 18_1 à 21_1, 22_2, 23_2, 25, 26_1 à 30_1, 36_1, 37_1, 47, 48, 50 à 58, 59_1 à 62_1, 63_2, 64_2, 66, 67_1 à 71_1, 82, 83_1 à 86_1, 97, 98, 105. Les théorèmes 10, 22, 29, 36, 47, 63, 79, 85, 98 n'interviennent pas entièrement : on n'en prend que le premier cas.

2° *La modalité de toute singularité de la liste est* $\geqslant 1$ *et celle des singularités de chacune des neuf classes confinantes est* > 1.

La première assertion résulte du fait que toutes les singularités de la liste sont adjacentes à P_8, X_9 ou J_{10}, et la seconde, du fait que toute singularité d'une classe confinante a la modalité intérieure supérieure à 1.

3° *Aucune singularité de la liste n'est adjacente à une classe confinante.*

Les formes quadratiques des singularités de toutes les classes confinantes ont au moins deux carrés positifs (cf. [13]). L'indice d'inertie positif de la forme quadratique d'une singularité est semi-continu (voir par exemple [280]). L'indice d'inertie positif des formes quadratiques des singularités $T_{p,q,r}$ est inférieur à 2 (cf. [104]). Par conséquent, aucune singularité $T_{p,q,r}$ (tant parabolique qu'hyperbolique) ne peut être adjacente à une singularité de la classe confinante. Il s'ensuit que toutes les singularités $T_{p,q,r}$ sont unimodales.

Les singularités de corang 2 des classes confinantes ont la multiplicité $\mu \geqslant 15$, et pour toute singularité exceptionnelle $\mu \leqslant 14$. Aucune singularité exceptionnelle ne peut donc être adjacente à une singularité de corang 2 de la classe confinante.

Parmi les singularités exceptionnelles, seules celles de corang 3 pourraient être adjacentes aux singularités confinantes de corang supérieur à 2. Or, toute singularité confinante de corang supérieur à 2 d'une classe confinante est de multiplicité $\mu \geqslant 14$, et les singularités exceptionnelles sont de multiplicité $\mu \leqslant 12$, ce qui interdit toute adjacence.

De 1°, 2°, 3° il ressort que toutes les singularités de la liste, et elles seules, sont unimodales.

Démonstration du théorème de classification des singularités bimodales.

1° *Toute singularité non simple et non unimodale ou bien appartient à la liste des singularités bimodales du* n° 15.1.2 (p. 206), *ou bien est adjacente à l'une des neuf classes* $J_{4,0}$, $X_{2,0}$, $Z_{2,0}$, N, $Q_{3,0}$, $S^*_{2,0}$, $U^*_{2,0}$, V, O (nous dirons que ses neuf classes sont *confinantes pour les singularités bimodales*).

On démontre cette proposition en ajoutant aux théorèmes cités sous 1° dans la démonstration précédente les théorèmes 6_3 à 11_3, 12_2, 18_2 à 21_2, 22_3, 23_3, 24_2, 31_1 à 35_1, 36_2, 37_2, 59_2 à 62_2, 63_3, 64_3, 65_2, 72_1 à 76_1, 77_2, 78_2, 87_1, 89_1, 90_2, 91_2, 99 ; les théorèmes 10_3, 22_3, 36_2, 63_3, 77_2, 90_2 ne sont pas utilisés entièrement : on se borne à considérer le premier cas de chacun d'eux.

2° *Toute singularité de la liste a la modalité non inférieure à* 2, *et toute singularité de chacune des neuf classes confinantes a la modalité supérieure à* 2.

La première assertion résulte du fait que toute singularité de la liste est adjacente à une singularité de l'une des neuf classes des singularités quasi homogènes, confinantes pour les singularités unimodales et que toute singularité appartenant aux classes signalées a la modalité intérieure non inférieure à 2.

La seconde assertion résulte du fait que toute singularité quasi homogène d'une classe confinante pour les singularités bimodales a la modalité intérieure supérieure à 2.

3° *Aucune singularité de la liste n'est adjacente à une singularité de la classe confinante.*

Les formes quadratiques de toutes les singularités figurant sur la liste ont exactement deux carrés positifs dans la forme normale et sont non dégénérées (cf. [13], [103] à [105]). Les formes quadratiques des singularités des classes confinantes, à l'exception de N, V et O, ont deux carrés positifs et deux carrés nuls. La forme quadratique d'une singularité déformée est isomorphe à la restriction à un sous-espace de la forme de la singularité non déformée. Ceci exclut toute adjacence des singularités de la liste à une singularité d'une classe confinante autre que N, V et O.

Les adjacences à O sont interdites par la semi-continuité du corang, et les adjacences à V, par la stratification des formes cubiques (théorème 50). Les adjacences à N des germes de corang 2 de la liste sont exclues par la semi-continuité de l'ordre de la fonction en 0.

4° *Aucune singularité de corang* 3 *figurant sur la liste ne peut être adjacente à* N. Mieux, *aucune fonction de trois variables dont le 3-jet est réduit ne peut être adjacente à la classe* N.

Soit en effet $f = f_3 + f_4 + \ldots$ le développement taylorien avec une forme cubique f_3 réduite (i.e. exempte de facteurs multiples). Soit un petit appoint $\varphi = \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$ Si $f + \varphi$ est de classe N,

il existe une fonction u ayant un point non critique en 0 et telle que $f + \varphi = u^2 \bmod \mathfrak{m}^5$. Soient $u = u_1 + u_2 + u_3 \bmod \mathfrak{m}^4$ les premiers termes du développement taylorien de u. Alors

$$\varphi_2 = u_1^2, \quad f_3 + \varphi_3 = 2u_1u_2, \quad f_4 + \varphi_4 = 2u_1u_3 + u_2^2.$$

Ce système d'équations par rapport à u doit être résoluble pour certains φ aussi petits que l'on veut, avec $u_1 \neq 0$. Par conséquent, f_3 se décompose en un produit d'un facteur linéaire et d'un facteur quadratique, $f_3 = F_1F_2$, tels que les zéros de u_1 soient proches de ceux de F_1 et les zéros de u_2, de ceux de F_2: $u_1 = \varepsilon(F_1 + \alpha_1)$, $u_2 = (F_2 + \beta_2)/2\varepsilon$, où la quantité ε, la forme linéaire α_1 et la forme quadratique β_2 sont petites. Il ressort alors de la dernière équation qu'il existe des ε, φ_4, α_1 et β_2 aussi petits que l'on veut et tels que $4\varepsilon^2(f_4 + \varphi_4) - (F_2 + \beta_2)^2$ se divise par $F_1 + \alpha_1$. Donc F_2 se divise par F_1, ce qui est contradictoire avec le fait que f_3 est réduite.

Ainsi donc, aucune singularité de classes P, Q, R, S, T, U (et, en particulier, aucune singularité de corang 3 figurant sur la liste) n'est adjacente à X. La démonstration de 3° est terminée.

De 1°, 2° et 3° il ressort que toutes les singularités de la liste, et elles seules, sont bimodales.

§ 17. Singularités réelles, symétriques et de bord

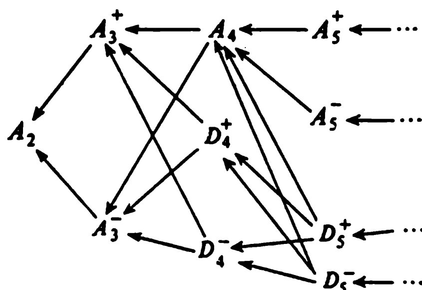
Nous discuterons trois généralisations de la théorie des points critiques de fonctions et donnerons les tableaux des singularités élémentaires pour le cas réel, le cas symétrique et le cas des fonctions sur une variété à bord.

17.1. Fonctions réelles. Considérons des fonctions réelles différentiables avec les points critiques 0 et les valeurs critiques 0. Les germes en 0 de deux fonctions réelles de ce type sont dits *stablement équivalents* si on peut les rendre équivalents (transformer l'un dans l'autre par une R-équivalence, i.e. par un changement de variables indépendantes) par une addition directe de formes quadratiques non dégénérées. Par exemple, les germes des fonctions $f(x, y) = x^3 - y^2$, $g(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2$ sont stablement équivalents. La classification des germes réels simples et unimodaux donnée ci-dessous est établie à l'équivalence stable près.

Germes simples.

$A_k^{\pm}$, $k \geqslant 1$	$D_k^{\pm}$, $k \geqslant 4$	E_6	E_7	E_8
$\pm x^{k+1}$	$x^2y \pm y^{k-1}$	$x^3 \pm y^4$	$x^3 + xy^3$	$x^3 + y^5$

Remarque. $A_{2k}^{+} \sim A_{2k}^{-}$, $A_1^{+} \sim A_1^{-}$; dans le reste les germes indiqués ne sont pas équivalents. Voici un commencement de l'hiérarchie des singularités dégénérées des fonctions réelles:



les classes symbolisées par . . . forment un ensemble de codimension 5 dans l'espace des fonctions de point critique 0 et de valeur critique 0).

Germes unimodaux (d'après V. Mouravlev et V. Zakalyukin).

Nom	Forme normale	Restrictions
	Paraboliques :	
$P_8 = T_{3,3,3}$	$x^3 + ax^2z \pm xz^2 + y^2z$	$a^2 \neq 4$, si $+$
$X_9 = T_{2,4,4}$	$\pm x^4 + ax^2y^2 \pm y^4$	$a^2 \neq 4$, si $++$ ou $--$
$J_{10} = T_{2,3,6}$	$x^3 + ax^2y^2 \pm xy^4$	$a^2 \neq 4$, si $+$
	Hyperboliques de corang 2 :	
$J_{10+k} = T_{2,3,6+k}$	$x^3 \pm x^2y^2 + ay^{6+k}$	$a \neq 0$, $k > 0$
$X_{9+k} = T_{2,4,4+k}$	$\pm x^4 \pm x^2y^2 + ay^{4+k}$	$a \neq 0$, $k > 0$
$Y_{r,s} = T_{2,r,s}$	$\pm x^2y^2 \pm x^r + ay^s$	$a \neq 0$, r, $s > 4$
$\widetilde{Y}_r = \widetilde{T}_{2,r,r}$	$\pm (x^2 + y^2)^2 + ax^r$	$a \neq 0$, $r > 4$
	Hyperboliques de corang 3 :	
$P_{8+k} = T_{3,3,3+k}$	$x^3 \pm x^2z + y^2z + az^{k+3}$	$a \neq 0$, $k > 0$
$R_{l,m} = T_{3,l,m}$	$x(x^2 + yz) \pm y^l \pm az^m$	$a \neq 0$, $m \geqslant l > 4$
$\widetilde{R}_m = \widetilde{T}_{3,m,m}$	$x(\pm x^2 + y^2 + z^2) + ay^m$	$a \neq 0$. $m > 4$
$T_{p,q,r}$	$axyz \pm x^p \pm y^q \pm z^r$	$a \neq 0$, $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} < 1$
$\widetilde{T}_{p,m} = \widetilde{T}_{p,m,m}$	$x(y^2 + z^2) \pm x^p + ay^m$	$a \neq 0$, $p^{-1} + 2m^{-1} < 1$

Nom	Forme normale	Nom	Forme normale
	Exceptionnelles :		
E_{12}	$x^3+y^7 \pm z^2+axy^5$,	W_{13}	$\pm x^4+xy^4 \pm z^2+ay^6$,
E_{13}	$x^3+xy^5 \pm z^2+ay^8$,	Q_{10}	$x^3+y^2z \pm z^4+axz^3$,
E_{14}	$x^3 \pm y^8 \pm z^2+axy^6$,	Q_{11}	$x^3+y^2z \pm xz^3+az^5$,
Z_{11}	$x^3y+y^5 \pm z^2+axy^4$,	Q_{12}	$x^3+y^2z \pm z^5+az^4x$,
Z_{12}	$x^3y+xy^4 \pm z^2+ax^2y^3$,	S_{11}	$z(x^2+yz) \pm y^4+ay^3z$,
Z_{13}	$x^3y \pm y^6 \pm z^2+axy^5$	S_{12}	$z(x^2+yz)+xy^3+ay^5$,
W_{12}	$\pm x^4+y^5 \pm z^2+ax^2y^3$,	U_{12}	$x(x^2 \pm y^2) \pm z^4+axyz^2$

Ici a est un paramètre réel.

En ce qui concerne la réduction des singularités génériques à ces formes normales, on a les mêmes théorèmes que dans le cas complexe (p. 155). Ils se démontrent par les méthodes exposées aux paragraphes 11 à 16.

Remarque. Puisque les singularités complexes sont déjà classifiées, on peut considérer les formes réelles de chaque singularité complexe. Toutes les singularités simples réelles sont des formes réelles de singularités simples complexes, et les singularités unimodales réelles sont des formes réelles de singularités unimodales complexes. Or, ce résultat n'est pas évident *a priori* et ne peut être obtenu qu'en confrontant une classification complexe et une classification réelle effectuées de façon indépendante.

C'est que nous ignorons si la modalité se conserve ou non par la complexification. E. Vinberg a exhibé un exemple de représentation d'un groupe de Lie réel pour lequel la modalité d'un point croît à la suite de la complexification: telle est par exemple l'action canonique du groupe des quaternions dans $\mathbf{R}^4$ (le nombre de modules est nul avant la complexification et positif après).

La modalité d'un point critique ne diminue pas par la complexification (V. Mouravlev), mais on ignore si elle peut croître comme dans l'exemple ci-dessus.

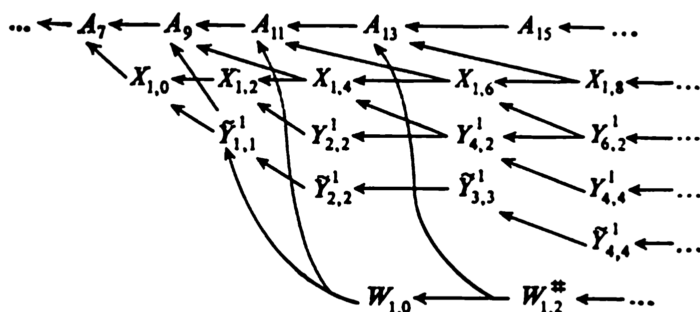
17.2. Les min-germes. Nous donnons ci-après un tableau composé par V. Vasiliev [309] dans lequel sont inventoriées les formes normales des germes de fonctions différentiables au voisinage des points du minimum (à l'addition près d'une constante et d'une forme quadratique définie positive de variables supplémentaires). La réduc-

tion à la forme normale est obtenue en faisant un changement différentiable de variables indépendantes. Dans la colonne l du tableau est indiqué le nombre de paramètres à partir duquel les points du minimum du type donné ne peuvent plus être supprimés par une petite déformation de la famille. Dans les familles génériques de fonctions avec $l < 16$, on ne rencontre jamais un point du minimum qui ne soit pas équivalent à un des points du tableau *).

Nom	Forme normale	Restrictions	l
A_{2k-1}	x^{2k}	$k \geqslant 1$	$2k-2$
$X_{1,0} = T_{2,4,4}$	$x^4 + ax^2y^2 + y^4$	$a > -2,\ a \neq 2$	7
$X_{1,2r} = T_{2,4,4+2r}$	$x^4 + x^2y^2 + ay^{4+2r}$	$a > 0,\ r \geqslant 1$	$7+2r$
$Y^1_{2r,2q} = T_{2,4+2r,4+2q}$	$x^{4+2r} + ax^2y^2 + y^{4+2q}$	$a > 0,\ r,\ q \geqslant 1$	$7+2r+2q$
$\tilde{Y}^1_{r,r} = \tilde{T}_{2,4+r,4+r}$	$(x^2+y^2)^2 + ay^{4+r}$	$a \neq 0,\ r \geqslant 1$	$7+2r$
$W_{1,0}$	$x^4 + (a+by)\,x^2y^3 + y^6$	$a^2 < 4$	12
$W^{\#}_{1,2q}$	$(x^2+y^3)^2 + (a+by)\,x^2y^{3+q}$	$a(-1)^q < 0,\ q \geqslant 1$	$12+2q$

Ici a, b sont des paramètres réels.

Principales adjacences:



Remarque. Un point du minimum est toujours de multiplicité μ *impaire.* Le diagramme de Newton d'une fonction dans un point du minimum de multiplicité finie présente les propriétés suivantes: 1) *ses sommets ont tous des coordonnées paires,* 2) *le diagramme traverse tous les axes de coordonnées.*

Nous appellerons *partie principale* d'une fonction analytique la somme de ses termes tayloriens dont les exposants appartiennent

*) On trouve dans [309] des formes normales aussi pour quelques autres séries, y compris toutes les singularités avec $l = 16$.

au diagramme de Newton. La somme des termes de la série de f dont les exposants appartiennent à une face donnée σ du diagramme sera notée f^σ.

Les parties principales des fonctions au point du minimum ont la propriété suivante: *pour chaque face σ le polynôme f^σ est partout non négatif. Si de plus les polynômes f^σ ne s'annulent pas en dehors des plans de coordonnées, la fonction f vérifie, au voisinage du point du minimum, l'encadrement suivant:*

$$cg \leqslant f \leqslant Cg, \qquad (*)$$

où g est la somme des monômes ayant pour exposants les sommets du diagramme de Newton, avec les coefficients égaux à 1.

Réciproquement, il ressort de l'encadrement (*) que *tous les f^σ sont positifs en dehors des plans de coordonnées. L'encadrement (*) a lieu pour presque toute fonction ayant le diagramme de Newton donné et admettant un point du minimum.*

Pour mieux décrire l'ensemble des parties principales des fonctions admettant un point du minimum, considérons l'espace P des polynômes dont les exposants appartiennent au diagramme donné (pour pouvoir servir de partie principale, le polynôme doit avoir des coefficients non nuls auprès de ses monômes qui correspondent aux sommets du diagramme). *Une hypersurface (homéomorphe à un hyperplan) partage l'espace P de polynômes en deux domaines. Suivant l'appartenance de la partie principale d'une fonction à l'un ou l'autre domaine, la fonction ou bien admet un point du minimum et vérifie l'encadrement (*) ou bien son point critique en 0 n'est jamais un minimum.*

On trouve les démonstrations des assertions formulées dans cette remarque dans le travail cité de V. Vasiliev. Voir aussi [71], [72].

Les fonctions génériques ne peuvent avoir que des minima non dégénérés. Or, dans des familles de fonctions dépendant des paramètres, les dégénérescences sont non supprimables.

Considérons une famille de fonctions différentiables f_λ sur une variété fermée qui dépendent d'un paramètre λ de dimension k. On appelle *fonction du minimum* de la famille la fonction $F(\lambda) = \min f_\lambda(x)$.

La fonction du minimum est continue mais n'est pas différentiable en tout point en général (dans un paysage à relief accidenté la ligne d'horizon peut être brisée). Un exemple de fonction du minimum est la distance d'un point donné du domaine au point le plus proche de sa frontière (la surface d'un tas de sable sur la pelle est le graphe d'une fonction du minimum). Il est clair que cette fonction présente toujours des singularités. La connaissance des singularités des fonctions du minimum est essentielle dans les problèmes de calcul variationnel, de contrôle optimal, de théorie des jeux, etc.

La théorie développée plus haut permet d'inventorier les singularités des fonctions du minimum des familles génériques dépendant de $k \leqslant 10$ paramètres. La classification est établie à la R^+-équivalence près, i.e. aux difféomorphismes près de l'espace des paramètres et à l'addition près d'une fonction différentiable des paramètres.

Par exemple, la fonction du minimum d'une famille générique à un paramètre est équivalente à $-|\lambda|$ au voisinage de chaque point singulier. Dans les familles à deux paramètres on rencontre des singularités de trois types, avec les formes normales $-|\lambda_1|$, $-|\lambda_1| - |\lambda_2 + |\lambda_1||$, $\min (x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x)$. Tant que l'espace des paramètres est de dimension inférieure à 7, la liste des formes normales est finie, et à partir de la dimension 7 on y voit apparaître des modules.

D'après L. Bryzgalova [71], [72], le nombre $\nu(k)$ de formes normales est donné par le tableau

k	1	2	3	4	5	6	$\geqslant 7$
$\nu(k)$	1	3	5	8	12	17	∞

L. Bryzgalova a exhibé également tous les germes simples et stables de fonctions du minimum : ils coïncident à la R^+-équivalence près avec les singularités de la fonction du minimum de la famille de polynômes $x^{2r} + \lambda_1 x^{2r-2} + \ldots + \lambda_{2r-2} x$. Toutes les singularités des fonctions du minimum des familles génériques à $k < 7$ paramètres sont simples et stables.

La fonction du minimum d'une famille générique est localement topologiquement R-équivalente à une fonction différentiable et même à une fonction de Morse ; cela est vrai pour un nombre arbitraire de paramètres (cf. V. Matov [213]).

17.3. Singularités symétriques. Considérons une fonction holomorphe invariante par l'action linéaire d'un groupe compact G dans $\mathbf{C}^k$.

1° Théorème. *Toute fonction holomorphe G-invariante admettant en* 0 *un point critique non dégénéré à valeur critique* 0 *peut être réduite à sa partie quadratique par un changement de variables indépendantes G-invariant* (*i.e. commutant avec l'action de G*) *et biholomorphe en* 0.

On a un « lemme de Morse équivariant » analogue dans les cas analytique réel et différentiable.

2° Dans l'espace $\mathbf{C}^{n+1}$ muni de coordonnées $z_0, \ldots, z_n$, considérons un plan $\mathbf{C}^n = \{z : z_0 + \ldots + z_n = 0\}$. Le groupe des permutations de coordonnées $S(n+1)$ renvoie ce plan sur lui-même. Désignons par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients du polynôme $z^{n+1} + \lambda_1 z^{n-1} + \ldots + \lambda_n$ à racines $z_0, \ldots, z_n$. C'est une base dans l'espace des fonctions symétriques (i.e. $S(n+1)$-invariantes) sur le plan $\mathbf{C}^n$.

Le commencement de l'hiérarchie des fonctions symétriques sur le plan $\mathbf{C}^n$ au voisinage du point critique 0 se présente comme suit *):

$n+1$	Type	Forme normale	m_f	m_h	codim
2	I_k	$\pm\lambda_1^k$	0	0	$k-1$
3	I	$\pm\lambda_1$	0	0	0
3	II	$\pm\lambda_2$	0	0	1
3	III_k	$\pm\lambda_1^2+a\lambda_2^k$, $a\neq 0$	1	0	k
3	IV	$\pm\lambda_1\lambda_2+a\lambda_1^3$	1	0	3
3	V	néant	$\geqslant 2$	$\geqslant 2$	4
4	I	$\pm\lambda_1$	0	0	0
4	II_k	$\pm\lambda_2+a\lambda_1^k$, $a\neq 0$	1	0	$k-1$
4	III	$\pm\lambda_1^2+a\lambda_3+b\lambda_1\lambda_3$, $\Delta(a)\neq 0$	2	1	2
4	IV	néant	$\geqslant 2$	$\geqslant 2$	3
5	I	$\pm\lambda_1$	0	0	0
5	II	$\pm\lambda_2+a\lambda_1^2$	1	0	1
5	III	néant	$\geqslant 4$	$\geqslant 2$	2

Ici m_f, m_h sont les nombres de modules pour la fonction et pour son hypersurface de niveau nulle (il s'agit de l'action du groupe des difféomorphismes équivariants sur l'espace des germes de fonctions ayant la valeur critique 0 au point critique 0).

Diagrammes d'adjacence:

$n=2$ $\qquad I_1 \leftarrow I_2 \leftarrow \ldots$

$n=3$ $\qquad I \leftarrow II \leftarrow III_2 \leftarrow III_3 \leftarrow \ldots$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad IV \leftarrow V$

$n=4$ $\qquad I \leftarrow II_2 \leftarrow II_3 \leftarrow \ldots$
$\qquad\qquad\qquad\quad \uparrow$
$\qquad\qquad\qquad\quad III \leftarrow IV$

$n=5$ $\qquad I \leftarrow II \leftarrow III$

*) D'après [23] et conformément aux calculs de V. Goryunov.

3° Considérons l'action du groupe $S(n)$ des permutations de coordonnées dans l'espace $\mathbf{C}^n$ muni de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$. Le groupe des germes symétriques (commutant avec l'action de $S(n)$) de difféomorphismes $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ opère sur l'espace des germes de fonctions symétriques au point critique 0 de valeur critique 0. On dit qu'un germe de fonction symétrique est *simple* si son k-jet rencontre un nombre fini (borné pour $k \to \infty$) d'orbites, i.e. si le nombre de modules de la fonction est nul.

Les germes symétriques simples de fonctions dans un point critique se réduisent aux formes normales (par l'action du groupe des difféomorphismes symétriques). Nous citerons ces formes normales en conservant les notations de V. Goutsou (1976). Soient $s_p = x_1^p + \ldots + x_n^p$, $S_p = (x_1 - (s_1/n))^p + \ldots + (x_n - (s_1/n))^p$, pour $n = 2$ $x_1 + x_2 = y$, $x_1 - x_2 = z$. Les formes normales des germes simples se présentent comme suit:

n	Forme normale
$\geqslant 1$	$s_1^q + S_2$, $q \geqslant 2$
2	$y^2 + z^{2q}$, $q \geqslant 1$
2	$z^2y + y^p$, $p \geqslant 3$
2	$z^4 + y^3$
3	$s_1^2 + S_3$

Tous les tableaux de ce n° sont tirés de [23]. D'autres questions de la théorie des points critiques symétriques sont discutées [244], [327]; on y trouve aussi la littérature correspondante.

17.4. Singularités de bord. Par germe de variété à bord, on entend le germe de la paire $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{n-1})$ (ou $(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^{n-1})$) en 0. Dans ce n° seront classifiés les germes de fonctions à valeur critique 0 dans un point critique 0 au bord de la variété, ceci par rapport au groupe des difféomorphismes qui renvoient le bord sur lui-même.

Théorème. *Les points critiques simples de fonctions au bord d'une variété à bord appartiennent — à l'équivalence près — à la liste suivante des germes de fonctions $f(x, y)$ dans le point $x = y = 0$ du bord* $x = 0$:

B_k, $k \geqslant 2$	C_k, $k \geqslant 2$	F_4
$\pm x^k \pm y^2$	$xy \pm y^k$	$\pm x^2 + y^3$

Ici l'équivalence des fonctions d'un nombre différent de variables s'entend au sens de l'équivalence stable sur la variété à bord (cf. n° 17.1).

Remarques. 1. Les germes de fonctions aux points critiques non simples forment un ensemble de codimension 3 dans l'espace des fonctions avec le point critique 0 et la valeur critique 0 ; dans les familles génériques de fonctions dépendant de $l < 4$ paramètres tout point critique au bord est simple.

2. Les germes de fonctions aux points critiques simples des types B_k, C_k, F_4 forment des ensembles de codimension $k - 2$ dans l'espace des germes de point critique 0 et de valeur critique 0 ; autrement dit, ces singularités apparaissent comme non supprimables dans les familles de fonctions dépendant d'au moins $k - 1$ paramètres.

3. Les singularités B_2 et C_2 sont équivalentes.

4. Le théorème ne figure pas explicitement dans [23], car en 1975 on ne connaissait pas encore le lien des singularités de bord avec les groupes de Coxeter. Pitt et Poston ont indiqué en 1978 quelques premières singularités de bord (voir [247]).

On trouve dans [26] la démonstration du théorème précédent, ainsi qu'une discussion détaillée du lien des singularités de bord simples avec les groupes engendrés par les réflexions, les algèbres de Lie simples et les diagrammes de Dynkine (notés par les mêmes lettres). En particulier, on définit dans [26] la forme des intersections de la singularité de bord et on montre que les singularités simples ne sont autres qu'elliptiques.

Beaucoup d'objets admettent des analogues (non formels) complexes : c'est ainsi que l'analogue complexe du groupe Z_2 est Z, celui du groupe symétrique $S(n)$, le groupe B_n des tresses d'Artin ; les espaces contractiles ont pour analogue complexe les espaces $K(\pi, 1)$; la théorie de Morse, la théorie de Picard-Lefschetz. A une variété à bord $F \geqslant 0$ correspond dans le cas complexe la variété $F = z^2$, i.e. le revêtement à deux feuillets, ramifié le long du bord, de l'espace complexe initial.

Par passage au revêtement à deux feuillets, les fonctions sur une variété à bord se transforment en fonctions symétriques par rapport à l'involution où une des coordonnées change de signe. La liste des formes normales des fonctions symétriques simples citée dans le n° 17.2, pour $n = 2$, se déduit de la liste des singularités de bord simples B_k, C_k, F_4 en faisant la substitution $x = z^2$ (dans le même ordre d'idées, le cas $n = 3$ correspond à l'algèbre de Lie simple G_2). Les algèbres simples A_k, D_k et E_6, E_7, E_8 s'inscrivent elles aussi dans ce schéma : elles se font correspondre les fonctions

$A_k,\ k \geqslant 1$	$D_k,\ k \geqslant 4$	E_6	E_7	E_8
$\pm y^{k+1} + x$	$y_1^2 y_2 \pm y_2^{k-1} + x$	$y_1^3 \pm y_2^4 + x$	$y_1^3 + y_1 y_2^3 + x$	$y_1^3 + y_2^5 + x$

Le point 0 n'est critique que pour la restriction de la fonction au bord $x = 0$.

L'indice d'un point singulier d'un champ de vecteurs se prête difficilement à une généralisation au cas d'une variété à bord. Or, pour une 1-forme différentielle, on arrive à définir les indices des singularités de bord de façon à vérifier la formule de Hopf : la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété compacte à bord est égale à la somme des indices de toutes les singularités de la 1-forme. Le calcul de ces indices conduit à l'étude des signatures des formes quadratiques canoniquement définies sur les algèbres locales correspondantes. S'agissant de singularités simples, ces signatures sont aussi égales à celles des formes définies par la convolution des invariants des groupes correspondants engendrés par les réflexions. Une analyse de cette coïncidence montre que les formes elles-mêmes sont duales. Cette dualité s'avère d'une grande utilité lorsqu'il s'agit de formuler ou de démontrer tel ou tel théorème des formes normales. Par exemple, le lemme de Morse équivariant admet un « théorème dual » : un champ de vecteurs transversal à une queue d'aronde est localement rectifié par un difféomorphisme qui conserve la queue d'aronde. Un développement de cette théorie conduit par exemple à une classification des projections singulières des surfaces génériques dans $\mathbf{R}^3$ (dix formes normales simples réelles *)). Pour les détails nous renvoyons à [27], [195] et [197] ; V. Goryunov [128] a trouvé toutes les projections simples d'hypersurfaces.

La liste des projections simples d'hypersurfaces (qui peuvent aussi être singulières) sur une droite s'avère être identique à celle des singularités simples de fonctions sur une variété à bord.

Il existe aussi une classification exhaustive des singularités de bord de fonctions unimodales. Toute singularité de cette espèce appartient — à une équivalence stable près — à l'une des listes suivantes :

---

*) Surfaces $z = x,\ x^2,\ x^3 + xy,\ x^3 \pm xy^2,\ x^3 + xy^3,\ x^4 + xy,\ x^4 + x^2y + xy^2,\ x^5 + x^3y \pm xy$; projection $(x, y, z) \mapsto (y, z)$.

Singularités de bord unimodales de corang 2 (voir [26]) :

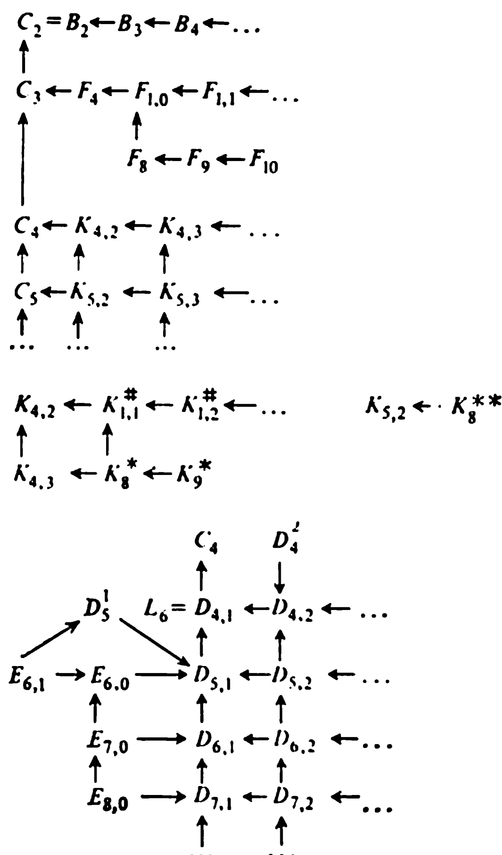
Nom	Forme C-normale	Restrictions	μ
$F_{1,0}$	$x^3+axy^2+y^3$	$4^3+27 \neq 0$	6
$F_{1,p}$	$ax^{p+1}+xy^2+y^3$	$a \neq 0,\ p \geqslant 1$	$6+p$
F_8	$x^4+y^3+ax^3y$	néant	8
F_9	$x^3y+y^3+ax^2y^2$	néant	9
F_{10}	$x^5+y^3+ax^4y$	néant	10
$K_{4,2}$	$y^4+axy^2+x^2$	$a^2 \neq 4$	6
$K_{4,q}$	$y^4+xy^2+ax^q$	$a \neq 0,\ q>2$	$q+4$
$K_{p,q}$	$y^p+xy^2+ax^q$	$a \neq 0,\ p>4,\ q \geqslant 2$	$p+q$
$K^{\#}_{1,\,2p-3}$	$(x+y^2)^2+ax^py$	$a \neq 0,\ p>1$	$2p+3$
$K^{\#}_{1,\,2p-4}$	$(x+y^2)^2+ax^p$	$a \neq 0,\ p>2$	$2p+2$
K^*_8	$y^4+x^2y+ax^3$	néant	8
K^*_9	$y^4+x^3+ax^2y^2$	néant	9
K^{**}_8	$y^5+x^2+axy^3$	néant	8

Singularités de bord unimodales de corang 3 (d'après V. Matov 212]) :

Nom	Forme R-normale	μ
$L_6=D_{4,1}$	$y_1^2y_2 \pm y_2^3+xy_1+axy_2$	6
$D_{k,l}$	$y_1^2y_2 \pm y_2^{k-1}+axy_1^l+xy_2$	$k+l+1$
$E_{6,0}$	$y_1^3 \pm y_2^4+axy_1+xy_2$	8
$E_{7,0}$	$y_1^3+y_1y_2^3+axy_1+xy_2$	9
$E_{8,0}$	$y_1^3+y_2^5+axy_1+xy_2$	10
D^1_5	$y_1^2y_2 \pm y_2^4+xy_1+axy_2^2$	8
$E_{6,1}$	$y_1^3 \pm y_2^4+xy_1+axy_2^2$	9
D^2_4	$y_1^2y_2 \pm y_2^3 \pm x^2+axy_1^2$	8

Pour L_6 on a $a^2 \pm 1 \neq 0$, et pour $D_{k,l}$ on a $a \neq 0,\ k \geqslant 4,\ l \geqslant 1,\ k+l>5$.

Principales adjacences:



17.5. Singularités tangentielles. Les diagrammes de bifurcation des singularités de bord simples B_k permettent de mieux cerner la position relative de la surface et de ses tangentes. Les singularités de ce type seront dites *tangentielles.*

L'exemple le plus simple de singularité tangentielle est le point d'inflexion d'une courbe plane. Un élément linéaire du plan est appelé *singulier* si son prolongement est tangent à la courbe ou s'il est appliqué en un point de la courbe. Au voisinage d'un élément d'une tangente ordinaire les éléments singuliers forment dans l'espace de tous les éléments linéaires du plan une surface difféomorphe au diagramme de bifurcation de B_2 multiplié par une droite, et au voisinage d'un élément de la tangente d'inflexion, une surface difféomorphe au diagramme de bifurcation de B_3 (voir [26]).

On peut décrire le diagramme de bifurcation de B_k comme suit: $\{\lambda \in \mathbf{R}^k$: le polynôme $x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \ldots + \lambda_k$ a une racine nulle ou multiple$\}$.

Considérons une surface différentiable dans un espace réel projectif. La répartition des points d'une surface générique en sept classes a été établie indépendamment par E. Landis [182] et O. Platonova [238] à [242] et aussi [177], [217].

La *courbe* différentiable *des points paraboliques* divise la surface en *domaines elliptique* et *hyperbolique*. Les points d'inflexion des courbes asymptotiques forment une courbe différentiable immergée dans le domaine non elliptique: la *courbe des inflexions*. En plus des deux domaines et des deux courbes que nous venons d'indiquer, on rencontre sur une surface générique encore trois types de points singuliers: les points de tangence élémentaire de la courbe des inflexions à la courbe des points paraboliques, les points de self-intersection élémentaire de la courbe des inflexions et les points des inflexions dégénérées élémentaires (en lesquels la courbe des inflexions est tangente à la direction asymptotique).

Ces sept classes de singularités tangentielles sont invariantes par les transformations projectives de l'espace ambiant et sont stables en ce sens qu'elles ne disparaissent pas mais se déforment légèrement quand on fait « bouger » la surface.

On dit qu'un élément linéaire de l'espace projectif est *singulier* par rapport à une surface donnée si son prolongement est tangent à la surface ou s'il est appliqué en un point de la surface. On définit de même les éléments singuliers par rapport à un germe de surface en un point. Les éléments singuliers par rapport à une surface donnée forment une hypersurface dans la variété de tous les éléments linéaires de l'espace projectif. Considérons le germe de cette hypersurface en un élément linéaire quelconque tangent à la surface.

Théorème (O. Platonova [239]). *L'ensemble des éléments singuliers par rapport à un germe de surface générique en un point quelconque de cette dernière est localement difféomorphe au produit du diagramme de bifurcation de B_k par l'espace euclidien $\mathbf{R}^{5-k}$, où k est la multiplicité de l'intersection de l'élément tangent à la surface avec cette surface (on a $k = 2$ pour un élément non asymptotique, $k = 3$ pour un élément asymptotique ordinaire, $k = 4$ pour les éléments asymptotiques de la courbe parabolique et la ligne des inflexions, sauf les éléments tangents à la courbe des inflexions dans les points d'inflexion dégénérée pour lesquels $k = 5$).*

Un élément linéaire non singulier définit un germe non singulier de projection de la surface (par des droites issues du point d'application de l'élément). En stratifiant la variété des éléments singuliers compte tenu de la position des strates par rapport aux fibres de la fibration $PT\mathbf{R}P^3 \to \mathbf{R}P^3$, on obtient une classification des germes de

projections de surfaces différentiables génériques dans RP^3 le long des droites issues d'un centre arbitraire. Il existe 14 classes: les 10 citées au bas de la page 240 plus $x^3 \pm xy^4$, $x^5 + xy$, $x^4 + x^2y + xy^3$ [239] à [242], [262] à [264], [118], [160], [35], [37], [38], [40].

Les singularités tangentielles apparaissent de façon naturelle aussi dans les problèmes de la diffraction et dans le problème variationnel du plus rapide détour pour éviter un obstacle ; c'est précisément dans ce dernier problème que O. Platonova a rencontré ces singularités.

D'autre part, N. Nékhorochev, en analysant l'évolution des variables d'action dans les systèmes de Hamilton proches d'un système intégrable, a introduit les indices de la pente $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ d'une fonction de Hamilton non perturbée H dans un domaine G de $\mathbf{R}^n$ [224], [225], [159], [53].

On dit que le plan Λ de dimension r est *permis* en un point x de G si x est un point critique de la restriction de H à Λ. Soit M_x l'ensemble de tous les plans permis en x, et soit $f_\Lambda = \text{grad}\,(H/\Lambda)$. On dit que la quantité $\alpha_r \geqslant 1$ est l'*indice de la pente* (ou de la raideur) de dimension r de H dans G si α_r est l'infimum des α tels que $\exists K > > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall \xi \in (0, \delta)$ $\exists \eta \in (0, \xi]$: $\forall \Lambda \in M_x$ $\forall x \in G$ $\forall y \in \Lambda$; de $|x - y| = \eta$ il ressort que $|f_\Lambda(y)| > K\xi^\alpha$.

E. Landis a mis en évidence le lien qui existe entre les indices α_r et les singularités tangentielles des surfaces de niveau d'une fonction de Hamilton. Notamment, on a $\alpha_1 \leqslant 2n + 1$ pour des fonctions de Hamilton génériques dépendant de n variables; pour $n = 3$ on a aussi $\alpha_2 \leqslant 2$, les valeurs indiquées étant atteintes de façon stable. Ainsi donc, la classification des singularités tangentielles des familles à un paramètre de surfaces permet de calculer les indices de la pente des fonctions de Hamilton génériques en tout point pour des systèmes à deux et à trois degrés de liberté.

Les singularités tangentielles sont liées également aux singularités de l'application qui à chaque élément linéaire tangent de la surface fait correspondre une droite projective qui le contient.

Soit une famille à un paramètre de géodésiques sur une surface dans l'espace euclidien à trois dimensions. Associons à chaque point de la surface la direction de la géodésique qui passe par ce point (un point sur la sphère). Les géodésiques de la famille sont tangentes aux courbes asymptotiques le long d'une certaine courbe de la surface. L'application construite sur la sphère admet en ces points des singularités: un pli dans chaque point générique et des fronces dans certains points exceptionnels. L'étude des singularités engendrées par une famille de géodésiques est poursuivie dans [35] à [38], [40], [43], [118], [160], [196], [241], [242], [262] à [264].

CHAPITRE III

SINGULARITÉS DES CAUSTIQUES ET DES FRONTS D'ONDE

Un des domaines d'application les plus propices de la théorie des singularités est l'étude des singularités des caustiques et des fronts d'onde et leurs bifurcations. Au point de vue mathématique, cette étude porte sur les singularités génériques d'applications très spécifiques, à savoir: applications lagrangiennes et legendriennes. Dans ce chapitre nous exposons quelques éléments de théorie des singularités lagrangiennes et legendriennes; le lecteur trouvera au § 21 une classification des singularités des caustiques génériques dans des espaces de dimension $\leqslant 10$ et de celles des fronts d'onde dans des espaces de dimension $\leqslant 11$.

Pendant le déplacement du front d'onde, ses singularités glissent le long de la caustique et en certains moments subissent des métamorphoses, ou bifurcations. Nous citons au § 22 une classification des métamorphoses subies par les fronts d'onde dans des familles génériques à un paramètre dans des espaces de dimension $\leqslant 5$, ainsi qu'une classification des métamorphoses des caustiques dans des familles génériques à un paramètre dans des espaces de dimension $\leqslant 3$.

§ 18. Singularités lagrangiennes

On peut voir une caustique en observant sur le mur la figure formée par les rayons lumineux réfléchis par une surface concave (par exemple, l'intérieur d'une tasse). En faisant bouger la tasse, on s'assure que les caustiques génériques ne peuvent présenter que des singularités standards, car toute singularité plus compliquée se décompose par une petite déformation en donnant naissance à des singularités standards. Dans ce paragraphe nous développerons une technique particulièrement adaptée à l'étude des singularités des caustiques: la théorie des singularités lagrangiennes.

18.1. Variétés symplectiques. Une caustique est l'enveloppe d'un système de rayons. En optique géométrique (ou en mécanique classique) les systèmes de rayons sont décrits en termes de sous-

variétés dites lagrangiennes de l'espace de phases. En ces termes, la caustique est l'ensemble des valeurs singulières de la projection d'une sous-variété lagrangienne de l'espace de phases sur l'espace de configuration. Commençons par rappeler les définitions fondamentales de la géométrie des espaces de phases.

On appelle *structure symplectique* sur une variété M une 2-forme fermée non dégénérée ω.

Exemple 1. L'espace vectoriel $M = \mathbf{R}^{2n}$ muni de coordonnées $(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$ a une structure symplectique standard $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ (il est évident qu'il s'agit d'une forme fermée et non dégénérée).

Exemple 2. Soit V une variété différentiable de dimension n (espace de configuration); soit $\pi: T^*V \to V$ son fibré cotangent. La variété $M = T^*V$ de dimension $2n$ est appelée *espace de phases* de V. L'espace de phases a une *structure symplectique standard* définie de la façon suivante. Soit $\tau: TM \to M$ un fibré tangent. Définissons sur T^*V la *1-forme standard* α telle que $\alpha(\xi) = (\tau\xi)(\pi_*\xi)$. La structure symplectique standard de l'espace de phases est la 2-forme $\omega = d\alpha$.

Soient $(q_1, \ldots, q_n)$ des coordonnées locales dans l'espace de configuration et $(p_1, \ldots, p_n)$ les coordonnées correspondantes dans l'espace de phases. Alors la 1-forme standard s'écrit sous la forme $\alpha = \sum p_i dq_i$. D'où il ressort que la 2-forme $\omega = d\alpha$ est fermée et non dégénérée (voir exemple 1).

Théorème (Darboux). *Toutes les structures symplectiques sur des variétés de dimension donnée sont localement équivalentes (difféomorphes).*

Autrement dit, *toute structure symplectique s'écrit au voisinage de chaque point en coordonnées convenables sous la forme* $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$.

Démonstration. Appliquons la méthode d'homotopie. Soit $\{\omega_t\}$ ($t \in [0, 1]$) une famille, qui dépend différentiablement de t, de germes de 2-formes non dégénérées au voisinage de 0 indépendantes de t en 0. Cherchons une famille de germes de difféomorphismes $\{g_t\}$ laissant 0 invariant, telle que $g_t^*\omega_t \equiv \omega_0$. Dérivant cette relation par rapport à t, nous obtenons l'équation homologique:

$$L_{v_t}\omega_t = -\gamma_t,$$

où γ_t est une 2-forme fermée connue (la dérivée de ω_t par rapport à t), et v_t le champ de vecteurs cherché. Utilisant l'identité $L = id + di$ (où L est la dérivée de Lie et i la convolution: $(i_v\omega)(\xi) = \omega(v, \xi)$), nous récrirons l'équation homologique comme suit:

$$di_{v_t}\omega_t = -\gamma_t.$$

Choisissons maintenant une 1-forme α_t s'annulant en 0 et telle que $d\alpha_t = -\gamma_t$. L'équation $i_{v_t}\omega_t = \alpha_t$ est résoluble de façon univoque par rapport au champ v_t, car ω_t est non dégénéré. Le champ v_t s'annule en 0 et définit donc la famille cherchée de germes de difféomorphismes $\{g_t\}$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.

18.2. Champs de Hamilton. Soit $H: M \to \mathbf{R}$ une fonction sur une variété symplectique (M, ω). Etant non dégénérée, la forme ω définit un isomorphisme entre espace tangent et espace cotangent en tout point de la variété : à un vecteur v correspond une 1-forme $i_v\omega$. La différentielle de H est une 1-forme sur M. L'isomorphisme précédent fait correspondre à H un champ de vecteurs X_H (de telle sorte que $dH(\xi) = -\omega(X_H, \xi)$). Ce champ de vecteurs est appelé *champ de Hamilton*, et H, le *hamiltonien* ou la *fonction de Hamilton* de ce champ.

Le système d'équations différentielles définies par un champ de Hamilton s'appelle *système canonique d'équations de Hamilton.*

Exemple. Dans l'espace symplectique standard le système d'équations de Hamilton se présente comme suit :

$$\dot{p} = -\partial H/\partial q, \quad \dot{q} = \partial H/\partial p$$

(ce qui explique le signe négatif introduit plus haut).

Le flot des équations de Hamilton conserve la structure symplectique. En effet, comme $L = id + di$, on a

$$L_{X_H}\omega = i_{X_H} d\omega + di_{X_H}\omega = -ddH = 0.$$

La dérivée d'une fonction F prise suivant la direction d'un champ de Hamilton de hamiltonien H est appelée *crochet de Poisson* (H, F). Il est évident que $(H, F) = dF(X_H) = -\omega(X_F, X_H)$, aussi le crochet de Poisson est-il alterné. On voit sans peine que le crochet de Poisson vérifie l'identité de Jacobi, si bien qu'un espace de fonctions de Hamilton muni du crochet de Poisson est une algèbre de Lie.

Un champ dont le hamiltonien est un crochet de Poisson de deux fonctions est lui-même crochet de Poisson de deux champs ayant comme hamiltoniens les fonctions en question.

Deux fonctions sont dites *en involution* si leur crochet de Poisson est nul. Autrement dit, les fonctions en involution avec le hamiltonien sont des intégrales premières des équations de Hamilton.

Il y a deux moyens d'abaisser la dimension d'une variété ordinaire : la section et la projection (i.e. le passage aux sous-variétés et aux quotients). Dans la classe des variétés symplectiques la dimension ne peut varier que d'un nombre pair. On diminue la dimension en deux étapes, dont l'une est une section et l'autre une projection.

Considérons par exemple la sous-variété $H = \text{Cte}$ d'une variété symplectique M de dimension $2n$. Cette sous-variété est de dimension impaire, mais elle est divisée en trajectoires du champ de Hamilton de hamiltonien H. L'ensemble des trajectoires sur la surface $H = \text{Cte}$ peut être regardé comme une variété de dimension $2n - 2$ (au moins localement, au voisinage d'un point non singulier, mais parfois aussi globalement). Cette variété N de dimension $2n - 2$ hérite de M une structure symplectique définie comme suit. Soient A une surface $H = \text{Cte}$, et $\pi: A \to N$ la projection. On définit sur N la structure symplectique $\tilde{\omega}$ par la formule

$$\tilde{\omega}(\pi_*\xi, \pi_*\eta) = \omega(\xi, \eta)$$

pour tous vecteurs ξ, η tangents à A en un point. On vérifie sans peine que la valeur du second membre ne dépend que des projections $\pi_*\xi$, $\pi_*\eta$ et définit sur le quotient une structure symplectique.

Exemple. Soient M l'espace standard $\mathbf{R}^{2n}$, $H = p^2$, A l'hypersurface $H = 1$.

La solution des équations de Hamilton se présente sous la forme $q = q_0 + 2p_0t$, $p = p_0$. Pour cette raison l'espace des trajectoires de A est défini globalement: c'est la variété de toutes les droites orientées dans $\mathbf{R}^n$.

Corollaire. *La variété de toutes les droites orientées dans l'espace euclidien a une structure symplectique.*

Remarque. La variété de toutes les droites orientées dans l'espace euclidien est difféomorphe au fibré (co)tangent d'une sphère.

En effet, associons à notre droite $q + pt$ le point $p/|p|$ qui est son vecteur unité. Ce point appartient à la sphère unité de l'espace euclidien. Le plan tangent à la sphère en $p/|p|$ est percé par notre droite en un point. Ce point définit un vecteur tangent sur la sphère. On vérifie sans peine que les deux structures symplectiques de l'espace des droites dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ (induites l'une de $\mathbf{R}^{2n}$ et l'autre de T^*S^{n-1}) ne diffèrent que par le signe.

18.3. Sous-variétés lagrangiennes. Une sous-variété d'un espace symplectique est appelée *isotrope* si la forme définissant la structure symplectique induit une forme nulle sur cette sous-variété.

Exemple 1. Le plan $p = \text{Cte}$ est isotrope dans l'espace symplectique standard $\{(p, q)\}$.

Exemple 2. Toute courbe dans le plan symplectique $\mathbf{R}^2$ de dimension 2 est isotrope.

La dimension d'une sous-variété isotrope n'est jamais supérieure à la moitié de la dimension de la variété symplectique ambiante (car la 2-forme symplectique est non dégénérée).

Les sous-variétés isotropes de la plus grande dimension possible (i.e. égale à la moitié de la dimension de l'espace symplectique ambiant) sont appelées *lagrangiennes.*

Exemple 3. Parmi les C_{2n}^n plans de coordonnées de dimension n d'un espace symplectique de dimension $2n$, il y a 2^n sous-variétés lagrangiennes: ce sont des plans définis comme suit. Soit I une partie de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Considérons n axes de coordonnées p_i, $i \in I$, et q_j, $j \notin I$. Le plan construit sur ces axes est lagrangien.

Autrement dit, tous les plans de coordonnées lagrangiens se déduisent du plan construit sur les axes $(p_1, \ldots, p_n)$ par une rotation « de 90° » dans certains plans (p_j, q_j) de dimension 2 (une telle rotation $(p_j, q_j) \mapsto (q_j, -p_j)$ préserve la structure symplectique et envoie donc un plan lagrangien sur un plan lagrangien).

Les sous-variétés isotropes des exemples 1 et 2 sont lagrangiennes.

Exemple 4. Soient V une sous-variété quelconque dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ et L la variété des normales orientées à V. Alors L est une sous-variété lagrangienne de la variété symplectique de toutes les droites orientées dans $\mathbf{R}^n$.

D é m o n s t r a t i o n. Considérons dans $\mathbf{R}^{2n} = T^*\mathbf{R}^n$ la 1-forme standard $\alpha = p\,dq$. Considérons la sous-variété de dimension n formée des vecteurs cotangents s'annulant sur L (pour l'identification euclidienne des vecteurs cotangents et tangents, la sous-variété en question est celle des vecteurs normaux à L). La restriction de α à la sous-variété indiquée est nulle. Il en découle aussitôt que la variété des normales orientées est isotrope et lagrangienne.

Exemple 5. Etant donnée une fonction arbitraire $S(q)$, $q \in \mathbf{R}^n$, définissons dans l'espace symplectique standard $\mathbf{R}^{2n}$ une sous-variété telle que $p = \partial S/\partial q$. C'est une sous-variété lagrangienne.

En effet, on a sur cette variété $p\,dq = dS$, si bien que la restriction de $dp \wedge dq$ à cette variété est nulle.

La fonction S est appellée *fonction génératrice* de la variété lagrangienne.

Toute sous-variété lagrangienne de l'espace symplectique standard $\mathbf{R}^{2n}$, qui est graphe de l'application $p = f(q)$, se laisse définir localement par la fonction génératrice. (Puisque le graphe est lagrangien, la restriction au graphe de la forme $p\,dq$ est fermée et, à ce titre, représente localement une différentielle de la fonction.)

Exemple 6. Un germe de sous-variété lagrangienne de l'espace symplectique standard est graphe de l'application $p = f(q)$ si et seulement s'il est transversal au plan lagrangien $q =$ Cte. Tout germe lagrangien n'est pas transversal à ce plan. Par contre, tout

germe lagrangien dans $\mathbf{R}^{2n}$ est transversal à un des 2^n plans lagrangiens construits sur les axes de coordonnées (cf. [17]).

Si le germe lagrangien est transversal au plan construit sur les axes p_i $(i \in I)$ et q_j $(j \in J)$, il est graphe du germe de l'application $(q_I, p_J) \to (p_I, q_J)$. Dans ce cas ce germe est défini au moyen d'une fonction génératrice $S(q_I, p_J)$ par les formules

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_J$$

(ces formules découlent de celles de l'exemple 5 par la rotation « de 90° » dans les plans de coordonnées (p_j, q_j), $j \in J$). Les coordonnées q_j et les impulsions p_j, $j \in J$, affectées de signe « — » dans la formule, seront appelées *pathologiques*. Si l'intersection du plan lagrangien avec le plan $q =$ Cte est de dimension k, on peut choisir une fonction génératrice à k arguments pathologiques.

Corollaire. *Tous les germes lagrangiens dans* $\mathbf{R}^{2n}$ *sont localement symplectomorphes.*

Démonstration. De l'exemple 6 il ressort que tout germe lagrangien se laisse définir par une fonction génératrice en coordonnées symplectiques convenables: $p = \partial S/\partial q$. Le difféomorphisme $(p, q) \to (p - dS/\partial q, q)$ préserve la structure symplectique et met le germe sous la forme $p = 0$.

18.4. Fibrations lagrangiennes. Une fibration $\pi: E^{2n} \to B^n$ est dite *lagrangienne* si l'espace E est muni d'une structure symplectique et si les fibres sont des sous-variétés lagrangiennes.

Exemple 1. $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^n$, $(p, q) \mapsto q$ est une *fibration lagrangienne standard.*

Exemple 2. *La fibration cotangente* $T^*B \to B$ de toute variété B est lagrangienne. En effet, la 1-forme standard $\alpha = p\, dq$ s'annule le long des fibres de la fibration cotangente, ce qui veut dire que sa différentielle $\omega = d\alpha$ s'annule elle aussi.

Théorème. *Toutes les fibrations lagrangiennes d'une dimension donnée sont localement symplectomorphes* (*localement = au voisinage de tout point de l'espace fibré*).

Démonstration. Choisissons sur la base de la fibration π n germes de fonctions $Q_1, \ldots, Q_n$ avec des différentielles indépendantes à l'origine du germe. Les germes de leurs images réciproques $(q_1 = \pi^* Q_1, \ldots, q_n = \pi^* Q_n)$ au point considéré de l'espace fibré ont eux aussi des différentielles indépendantes.

Considérons des champs de vecteurs X_i de hamiltoniens $(q_1, \ldots, q_n)$. Montrons que *ces champs sont tangents aux fibres de la fibration.* En effet, on a $dq_i(\xi) = -\omega(X_i, \xi)$, si bien que l'espace vectoriel engendré par tous les vecteurs ξ tangents à la fibre et par le

vecteur X_i dans l'espace tangent T_eE à l'espace fibré en un point quelconque est isotrope ($\omega = 0$). Or, l'espace tangent à la fibre est déjà un sous-espace lagrangien (isotrope maximal) de l'espace symplectique vectoriel T_eE. Il s'ensuit que le vecteur X_i est tangent à la fibre.

Nous en tirons la conclusion que les fonctions q_i sont en involution :

$$(q_i, q_j) = \omega (X_i, X_j) \equiv 0,$$

car la fibration est lagrangienne. Par conséquent, les champs X_i, X_j commutent, de même que leurs flots de phases.

Choisissons, au point étudié, un germe lagrangien transversal à la fibre. Définissons les fonctions $p_1, \ldots, p_n$ au voisinage du point de la façon suivante : en nous déplaçant à partir du point du germe lagrangien choisi pendant le temps t_1 dans le sens du champ $-X_1$, puis pendant le temps t_2 dans le sens du champ $-X_2$, et ainsi de suite, on aboutira à un point où $p_1 = t_1$, $p_2 = t_2, \ldots$

Les germes de fonctions $(p_1, \ldots, p_n ; q_1, \ldots, q_n)$ constituent un système de coordonnées locales en lequel la fibration se définit par la formule $(p, q) \mapsto q$.

Considérons les intersections des surfaces de niveau des fonctions $p_1, \ldots, p_n$. Ce sont des translations de la variété lagrangienne choisie (transversale à la fibre) par des difféomorphismes symplectiques. Par conséquent, les intersections sont lagrangiennes. Or, on a $-\omega (X_i, \xi) = dp_i (\xi) = 0$ pour tout vecteur ξ tangent à l'intersection, d'où il ressort que les champs X_i sont tangents aux intersections (sans quoi on pourrait ajouter le vecteur X_i à l'espace tangent à l'intersection sans compromettre l'isotropie).

Maintenant on calcule sans problèmes tous les crochets de Poisson des fonctions $(p_1, \ldots, q_n)$ deux à deux ; on s'assure que la structure symplectique se présente en coordonnées construites sous sa forme standard $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque. Nous avons muni en passant chaque fibre de la fibration lagrangienne d'une structure locale d'espace affine (définie par les coordonnées $(p_1, \ldots, p_n)$). L'arbitraire de la construction proposée se réduit au choix des fonctions $(Q_1, \ldots, Q_n)$ et de la section lagrangienne ($p = 0$). On vérifie cependant sans peine que toute variation des fonctions et de la section conduit dans la fibre à des coordonnées p qui ne diffèrent des coordonnées construites que par une transformation affine. En effet, une variation des coordonnées Q_i entraîne une transformation linéaire de dQ_i et donc des champs X_i, et une variation de la section lagrangienne a pour effet un simple décalage de l'origine p.

18.5. Equivalences lagrangiennes. On appelle *équivalence lagrangienne* de deux fibrations lagrangiennes un symplectomorphisme d'espaces fibrés qui envoie les fibres de la première fibration sur celles de la seconde.

Exemple 1. Considérons la fibration lagrangienne standard $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^n$, $(p, q) \mapsto q$. Pour toute fonction S définie sur la base de la fibration, l'application de l'espace fibré dans lui-même définie par $(p, q) \mapsto (p + \partial S/\partial q, q)$ est une équivalence lagrangienne.

Exemple 2. Pour tout opérateur linéaire A: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, l'application de l'espace d'une fibration standard dans lui-même définie par $(p, q) \mapsto (A'^{-1}p, Aq)$ est une équivalence lagrangienne.

Exemple 3. Soit une fibration cotangente $T^*B \to B$, et soit g: $B \to B$ un difféomorphisme quelconque. Alors l'application induite $g^*: T^*B \to T^*B$ est une équivalence lagrangienne.

Exemple 4. Pour toute fonction $S: B \to \mathbf{R}$, l'application $T^*B \to T^*B$ définie par $\xi \to \xi + dS\,|_{\pi\xi}$ est une équivalence lagrangienne de la fibration $\pi: T^*B \to B$ dans elle-même.

Théorème. *Toute équivalence lagrangienne d'un germe de fibration cotangente dans lui-même se décompose en un produit d'équivalences définies dans les exemples* 3 *et* 4:

$$\xi \mapsto g^*\xi + dS\,|_{\pi g^*\xi},$$

où g est un germe de difféomorphisme de la base et S un germe de fonction sur la base.

Démonstration. Toute équivalence lagrangienne induit par définition un difféomorphisme de la base. Utilisant l'équivalence définie dans l'exemple 3, nous nous trouvons dans le cas où le difféomorphisme de la base est identique ; il s'agit de montrer que l'équivalence est alors celle de l'exemple 4.

On doit donc décrire tous les difféomorphismes symplectiques de la forme $(p, q) \mapsto (P(p, q), q)$. Puisqu'ils sont symplectiques, on a $P\,dq - p\,dq = dS$, donc $\partial S/\partial p = 0$ et $\partial S/\partial q = P - p$, i.e. $P = p + \partial S/\partial q$, ce qu'il fallait démontrer.

Considérons *l'action de l'équivalence lagrangienne Θ définie dans le théorème sur un germe de variété lagrangienne L*, section de la fibration cotangente. Le germe de L se définit par une fonction génératrice F d'après la formule $p = \partial F/\partial q$.

Le germe ΘL est lui aussi une section; calculons sa fonction génératrice. En vertu de ce qui précède, l'équivalence Θ peut être définie au moyen d'un difféomorphisme g de la base et d'une fonction S sur la base, par la formule

$$\Theta\xi = g^*\xi + dS\,|_{\pi g^*\xi}.$$

Théorème. *La fonction génératrice $\tilde{F}$ du germe ΘL se déduit de la fonction génératrice F du germe de L par un difféomorphisme de la base suivi d'addition d'une fonction définie sur la base:*

$$\tilde{F} = F \circ g^{-1} + S.$$

Démonstration. La forme $p\,dq$ étant invariante par g^*, on peut prendre $F \circ g^{-1}$ comme fonction génératrice du germe g^*L. Quant à la transformation $\xi \mapsto \xi + dS|_{\pi\xi}$, il est évident qu'elle ajoute S à la fonction génératrice.

18.6. Applications lagrangiennes. Considérons un plongement, dans l'espace de la fibration lagrangienne $\pi: E \to B$, d'une autre sous-variété lagrangienne $(i: L \to E)$.

La restriction de la projection π à L, i.e. $\pi \circ i: L \to B$, est appelée *application lagrangienne.*

Les applications lagrangiennes sont des applications de variétés de même dimension, mais elles forment une classe particulière d'applications: les singularités génériques dans la classe de toutes les applications et dans celle des applications lagrangiennes sont différentes en général.

Exemple 1. *L'application gradiente* $q \mapsto \partial S/\partial q$ est lagrangienne.

Exemple 2. *L'application gaussienne* sur une sphère d'une hypersurface d'espace euclidien orientée transversalement est lagrangienne.

En effet, la variété des normales orientées à la surface est une sous-variété lagrangienne du fibré cotangent de la sphère (voir la remarque du n° 18.2 et l'exemple 4 du n° 18.3).

Problème. Calculer la fonction génératrice de l'application gaussienne (i.e. la fonction génératrice de la variété de normales lagrangienne).

Réponse. C'est la fonction d'appui de l'hypersurface initiale: elle est égale dans le point x de l'hypersurface à $\langle x, y\rangle$, où y est vecteur unité de la normale en x.

Exemple 3. *L'application normale* qui au vecteur $\overrightarrow{uv}$ de la normale à une surface dans l'espace euclidien appliqué en un point u associe le point v de l'espace lui-même est lagrangienne.

Deux applications lagrangiennes sont Lagrange-équivalentes s'il existe une équivalence lagrangienne de deux fibrations correspondantes qui envoie la variété lagrangienne source de l'un des espaces fibrés dans la variété lagrangienne source du second.

On définit de même les équivalences lagrangiennes des germes.

Problème. Montrer que *tout germe d'application lagrangienne est Langrange-équivalent à un germe d'application gradiente* (resp. *à un germe d'application gaussienne*, resp. *à un germe d'application normale*).

Remarque. Tout germe lagrangien proche du germe gradient (resp. gaussien, resp. normal) donné est lui-même gradient (resp. gaussien, resp. normal) ; par conséquent, les phénomènes génériques dans la classe des applications gradientes (resp. gaussiennes, resp. normales) sont les mêmes que dans la classe de toutes les applications lagrangiennes.

18.7. Caustiques. L'ensemble des valeurs critiques d'une application lagrangienne s'appelle *caustique.*

Exemple. Pour une application normale d'une surface d'un espace euclidien, la caustique est le lieu des centres de courbure ; pour la construire, on porte le long de chaque normale les rayons correspondants des courbures principales.

Le lieu des centres de courbure de l'ellipse est une astroïde : c'est une courbe à quatre points de rebroussement. Ces singularités sont stables : quand on fait bouger l'ellipse, on obtient une courbe dont les centres de courbure forment une caustique à quatre points de rebroussement proche de l'astroïde. On peut aussi obtenir cette caustique comme enveloppe de la famille des normales à l'ellipse.

Le lieu des centres de courbure d'un ellipsoïde triaxial est déjà une surface assez compliquée, mais les singularités lagrangiennes de cette surface sont elles aussi stables ; elles ont déjà été étudiées par A. Cayley (1873).

Deux applications Lagrange-équivalentes ont leurs caustiques difféomorphes, car les applications sont elles-mêmes équivalentes à gauche et à droite.

En général, la difféomorphie des caustiques n'implique pas l'équivalence lagrangienne. Elle n'implique pas non plus l'équivalence à gauche et à droite, et l'équivalence à gauche et à droite n'implique pas l'équivalence lagrangienne.

Il existe pour les applications lagrangiennes une théorie des singularités particulière, parallèle à la théorie générale. Il se trouve que la théorie des germes lagrangiens stables se réduit à la théorie des déploiements versels de fonctions différentiables. Cela permet de tirer de la théorie des singularités des familles de fonctions une information substantielle sur les singularités lagrangiennes.

§ 19. Familles génératrices

On peut définir un germe de variété lagrangienne de dimension n par une fonction génératrice de n variables. Dans ce sens la variété des germes lagrangiens dans $\mathbf{R}^{2n}$ a un atlas de 2^n cartes dont chacune

est un espace de germes de fonctions de n variables (considérés à des constantes additives près).

Il est parfois plus commode de définir le germe lagrangien à l'aide d'un germe de fonction d'un plus grand nombre de variables, dit famille génératrice. Il est évident qu'à un germe lagrangien correspond une multitude de familles génératrices. On arrive cependant à décrire explicitement la classe des familles qui définissent des germes lagrangiens équivalents. La classification des singularités lagrangiennes s'en trouve réduite à un problème de la théorie des familles de fonctions.

19.1. Longueur de chemin optique comme famille génératrice. Les familles génératrices apparaissent de façon naturelle en optique géométrique. Soient, par exemple, dans l'espace euclidien deux sous-variétés de dimensions arbitraires (non nécessairement identiques) : une source de lumière et une surface observée. Une famille de fronts (équidistantes) se propageant à partir de la source définit une famille de fronts analogue sur la surface observée. D'une façon générale, en chaque point de la surface observée arrivent plusieurs fronts, qui correspondent à des rayons différents perpendiculaires à la source et aboutissant au point observé donné, si bien que la famille de fronts sur la surface observée est « multivoque ». Il n'en reste pas moins qu'à cette famille correspond une sous-variété lagrangienne parfaitement déterminée dans le fibré cotangent de la surface observée. Cette variété est constituée d'impulsions (différentielles de la longueur de chemin optique) qui correspondent à toutes les branches locales de la famille de fronts.

Mettons cette situation en formules. Soient $x \in \mathbf{R}^k$ les coordonnées d'un point de la source, $\lambda \in \mathbf{R}^l$ les coordonnées d'un point observé, $F(x, \lambda)$ la longueur de chemin optique de x à λ. La condition de perpendicularité *) à la source du rayon allant de x à λ s'écrit $\partial F/\partial x = 0$. Par conséquent, la variété lagrangienne dans le fibré cotangent de la surface observée se définit par la formule

$$\Lambda = \{\lambda, \varkappa : \exists x : \partial F/\partial x = 0, \quad \varkappa = \partial F/\partial \lambda\}. \qquad (*)$$

[Nous utilisons les coordonnées usuelles dans le fibré cotangent : le point $(\lambda, \varkappa)$ de $\mathbf{R}^{2l}$ est la forme $\varkappa_1\, d\lambda_1 + \ldots + \varkappa_l\, d\lambda_l$ dans le point λ de $\mathbf{R}^l$.]

La formule (*) définit la variété lagrangienne Λ de dimension l à l'aide d'une fonction F de $n = k + l$ variables. On peut regarder F comme une famille de fonctions de k variables x à l paramètres λ.

---

*) D'après cette condition, le chemin de x à λ est stationnaire par rapport aux chemins menant à λ au départ des points voisins de x.

L. Hörmander a proposé d'appeler une telle famille, *famille génératrice* pour le germe lagrangien Λ *).

Il convient de souligner que la variété lagrangienne Λ n'est pas en général une section du fibré cotangent: sa projection sur la surface observée définit des caustiques sur cette dernière. D'autre part, on suppose que F soit une fonction univoque.

On peut interpréter la formule (*) d'une façon différente. Considérons dans le fibré cotangent du produit de la source par la surface observée une sous-variété lagrangienne section, définie par la fonction génératrice F:

$$M = \{(x, \lambda; y, \varkappa): \quad y = \partial F/\partial x, \quad \varkappa = \partial F/\partial\lambda\}.$$

La variété Λ se déduit de M par une section par le plan $y = 0$ et par une projection subséquente (l'oubli de x et y).

Le même résultat peut être exprimé d'une façon plus savante, ce que nous ferons tout de suite.

19.2. Définitions préliminaires. Considérons une *fibration auxiliaire* $\rho: \mathbf{R}^{k+l} \to \mathbf{R}^l$, $\rho(x, \lambda) = \lambda$. Nous appellerons $\mathbf{R}^{k+l}$ le *grand espace* et $\mathbf{R}^l$ la base. L'espace de la fibration cotangente du grand espace et celui de la base seront appelés *grand espace de phases* et *petit espace de phases* respectivement.

Définition. On appelle *espace mixte* de ρ l'ensemble de tous les vecteurs cotangents au grand espace s'annulant sur les vecteurs tangents aux fibres de ρ.

L'espace mixte sera désigné par A.

L'espace mixte A est une sous-variété du grand espace de phases. Par conséquent, A est fibré au-dessus du grand espace. Ses fibres sont naturellement isomorphes aux espaces cotangents de la base. Cette fibration $A \to \mathbf{R}^{k+l}$ sera appelée *fibration mixte* **).

L'espace mixte A a une projection naturelle sur le petit espace de phases: un vecteur cotangent au grand espace, nul sur les vecteurs tangents aux fibres de la fibration auxiliaire, définit un vecteur cotangent sur la base. Les fibres de cette fibration $A \to T^*\mathbf{R}^l$ sont isomorphes à celles de la fibration auxiliaire ρ ***).

---

*) On rencontre des familles génératrices de fonctions linéaires en x déjà chez Jacobi et Lie (voir le procédé de définition des transformations canoniques par des fonctions d'un nombre redondant de variables dans E. T. Whittaker, *A treatise of the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge Univ. press, 1927).

**) La fibration mixte est la fibration induite par ρ de la fibration cotangente π de la base.

***) Cette fibration est induite de ρ par π.

Ainsi donc, la fibration mixte et deux fibrations cotangentes forment un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} T^*\mathbf{R}^l & \xleftarrow{\rho^*\pi} & A & \xrightarrow{i} & T^*\mathbf{R}^{k+l} \\ \pi\downarrow & & \pi^*\rho\downarrow & \swarrow & \\ \mathbf{R}^l & \xleftarrow{\rho} & \mathbf{R}^{k+l} & & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccccc} (\varkappa, \lambda) & \longleftarrow\!\shortmid & (x, \varkappa, \lambda) & \shortmid\!\longrightarrow & (x, 0, \varkappa, \lambda) \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ (\lambda) & \longleftarrow\!\shortmid & (x, \lambda) & & \end{array}$$

Définition. Une sous-variété lagrangienne du grand fibré cotangent est appelée ρ-*régulière* si elle est transversale à l'espace mixte A pour ρ.

19.3. Existence de la famille génératrice d'un germe lagrangien.

Théorème. 1° *La projection naturelle de l'intersection d'une variété lagrangienne ρ-régulière avec A dans le petit espace de phases est une sous-variété lagrangienne (immergée).*

2° *Tout germe de variété lagrangienne dans le petit espace de phases peut être déduit, au moyen de la construction* 1°, *d'un germe de section lagrangienne ρ-régulière du fibré cotangent d'un grand espace convenable.*

D é m o n s t r a t i o n. A) L'intersection d'une sous-variété lagrangienne ρ-régulière M avec A est une sous-variété de dimension l dans A. Montrons que *la restriction de l'application $\rho^*\pi$ à cette sous-variété est non dégénérée.*

Assimilons les plans tangents α à A et μ à M au point d'intersection à des sous-espaces vectoriels de l'espace symplectique vectoriel tangent au grand espace de phases.

On démontre facilement la

Proposition 1. *Le complémentaire orthogonal gauche* ann α *de α est l'espace tangent à la fibre de la fibration $\rho^*\pi$.*

En effet, la structure symplectique est de la forme $\Sigma dy \wedge dx + \Sigma d\varkappa \wedge d\lambda$, et α se définit par $y = 0$. Donc ann α est un x-espace de coordonnées, ce qui n'est autre que l'espace tangent à la fibre de $\rho^*\pi$. La proposition est démontrée.

D'après la condition de ρ-régularité, $\alpha + \mu =$ tout l'espace symplectique. Donc (ann α) $\cap$ (ann μ) $= 0$. Or, ann $\mu = \mu$, car μ est lagrangien. D'où (ann α) $\cap\ \mu = 0$. Or, conformément à la proposition 1, ann α est l'espace tangent à la fibre de $\rho^*\pi$. Il s'ensuit que l'intersection de M et A ne contient pas de vecteurs tangents aux fibres de cette fibration. La projection est donc bien une immersion.

B) *La variété immergée $L = \rho^*\pi\,(M \cap A)$ est lagrangienne.*

En effet, puisque $y = 0$ sur A, on a $\Sigma dy \wedge dx + \Sigma d\varkappa \wedge d\lambda = \Sigma d\varkappa \wedge d\lambda$. Donc, si les vecteurs tangents à $M \cap A$ dans le grand espace de phases sont orthogonaux gauches, leurs projections dans le petit espace de phases le sont aussi. Par conséquent, L est

lagrangienne chaque fois que M est lagrangienne. L'assertion 1° du théorème est démontrée.

C) Un germe arbitraire de sous-variété lagrangienne L dans le petit espace de phases se définit par une des 2^l fonctions génératrices de la forme $S(\lambda_I, \varkappa_J)$ d'après les formules

$$\varkappa_I = \partial S/\partial\lambda_I, \quad \lambda_J = -\partial S/\partial\varkappa_J.$$

Ici (I, J) est une partition de l'ensemble $\{1, \ldots, l\}$ en deux parties; soit k le cardinal de J (le nombre d'arguments pathologiques de la fonction S). Considérons S comme famille de fonctions du second argument pathologique (de dimension k), assimilant le premier argument à un paramètre. Considérons une famille $F(x, \lambda) = S(\lambda_I, x) + \langle\lambda_J, x\rangle$ de fonctions de l'argument x de dimension k, fonctions qui dépendent du paramètre λ de dimension l (cette famille est linéaire par rapport au paramètre λ_J). La famille F définit une section lagrangienne M du fibré cotangent du grand espace d'après les formules usuelles

$$y = \partial F/\partial x, \quad \varkappa = \partial F/\partial\lambda.$$

Définissons la fibration auxiliaire ρ par la formule usuelle $\rho(x, \lambda) = \lambda$.

Proposition 2. *La variété lagrangienne M est ρ-régulière. Le germe lagrangien qui lui correspond dans le petit espace de phases est la sous-variété lagrangienne initiale L.*

Démonstration. Les coordonnées locales sur M sont x et λ; d'après la définition de F, on a sur M

$$y = \partial S/\partial x + \lambda_J, \quad \varkappa_I = \partial S/\partial\lambda_I, \quad \varkappa_J = x.$$

Donc $\det(\partial y/\partial\lambda_J) \neq 0$. On voit que les restrictions des k formes dy_i à M sont indépendantes. Par conséquent, la variété M est transversale à A pour $y = 0$, i.e. est ρ-régulière.

Pour $y = 0$ il ressort des relations précédentes que

$$\lambda_J = -\partial S/\partial x, \quad \varkappa_I = \partial S/\partial\lambda_I, \quad x = \varkappa_J.$$

La projection de $M \cap A$ dans le petit espace de phases (l'oubli de x) se confond donc avec L. La proposition 2 est démontrée, et en même temps l'assertion 2° du théorème.

Définition. On appelle *famille génératrice du germe lagrangien L* un germe de fonction F sur le grand espace, où F est fonction génératrice d'un germe ρ-régulier de variété lagrangienne M: $y = \partial F/\partial x$, $\varkappa = \partial F/\partial\lambda$, qui se transforme en L par l'intersection avec l'espace mixte A de la fibration auxiliaire $\rho(x, \lambda) = \lambda$ et la projection naturelle dans le petit espace de phases.

Autrement dit, L se définit au départ de F d'après la formule (*) du n° 19.1.

Remarque 1. Condition de ρ-régularité: *la matrice* $(\partial^2F/\partial x^2,$ $\partial^2F/\partial x\, \partial\lambda)$ *a le rang maximal dans les points où* $\partial F/\partial x = 0$; *ce rang est égal au nombre* k *des arguments* x_i. En effet, la ρ-régularité signifie l'indépendance des restrictions des formes dy_i à M dans les points de $M \cap A$ et l'on a sur M

$$dy_i = \sum (\partial^2F/\partial x_i\, \partial x_j)\, dx_j + (\partial^2F/\partial x_i\, \partial\lambda_m)\, d\lambda_m.$$

Remarque 2. Le noyau de la dérivée de l'application lagrangienne (de la projection de L sur la base) s'exprime comme suit en fonction de la famille génératrice.

Considérons la matrice $\partial^2F/\partial x^2$ comme définissant un opérateur linéaire $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$, la matrice $\partial^2F/\partial\lambda\, \partial x$, un opérateur linéaire $\mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^k$ et la matrice transposée $\partial^2F/\partial x\, \partial\lambda$, un opérateur $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^l$.

Désignons le vecteur aux composantes $du_i\,(\eta)$ d'un élément η par $du\,(\eta)$, où u peut signifier x, ou y, ou λ, ou $\varkappa$.

Quand η *parcourt le noyau de la dérivée, le vecteur* $d\varkappa\,(\eta)$ *parcourt l'image du noyau de l'opérateur* $\partial^2F/\partial x^2$ *sous l'action de l'opérateur* $\partial^2F/\partial x\, \partial\lambda$.

On a en effet

$$dy = (\partial^2F/\partial x^2)\, dx + (\partial^2F/\partial\lambda\, \partial x)\, d\lambda, \quad dy\,(\eta) = 0, \quad d\lambda\,(\eta) = 0,$$
$$\varkappa = \partial F/\partial\lambda.$$

Donc,

$$dx\,(\eta) \in \operatorname{Ker}\,(\partial^2F/\partial x^2), \quad d\varkappa\,(\eta) = (\partial^2F/\partial x\, \partial\lambda)\, dx\,(\eta),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 3. Il découle de la ρ-régularité que l'application $\eta \mapsto d\varkappa\,(\eta)$ définit un *isomorphisme* du noyau de la dérivée à l'espace $(\partial^2F/\partial x\, \partial\lambda)\, \operatorname{Ker}\,(\partial^2F/\partial x^2)$ (car L est immergé dans le petit espace de phases).

Corollaire. *La dimension du noyau de la dérivée n'est pas supérieure à* min (k, l) (*i.e. aux dimensions de la fibre et de la base de la fibration auxiliaire*).

Si donc le noyau de la dérivée d'une application lagrangienne en un point est de dimension m, la dimension k de la fibre de la fibration auxiliaire pour la famille génératrice de cette application est non inférieure à m. Il existe un germe de famille génératrice de fibres de la plus petite dimension possible $k = m$. Nous l'avons construit dans la partie C) de la démonstration du théorème (puisque le nombre d'arguments pathologiques de la fonction génératrice S peut être pris égal à m).

Corollaire. *Pour le germe en un point de famille génératrice de fibre de la fibration auxiliaire de la plus petite dimension possible, on a* $\partial^2F/\partial x^2 = 0$ *dans le point considéré.*

19.4. Equivalence lagrangienne et R^+-équivalence de familles génératrices.

Définition. On dit qu'un difféomorphisme d'une fibration différentiable dans elle-même est *fibré* s'il envoie chaque fibre dans une fibre (un tel difféomorphisme induit un difféomorphisme de la base).

Soient F_1, F_2 deux familles génératrices définies sur l'espace de la fibration auxiliaire $\rho: \mathbf{R}^{k+l} \to \mathbf{R}^l$. On dit que les familles F_1 et F_2 sont *R-équivalentes* si elles passent l'une à l'autre par un certain difféomorphisme fibré Θ, i.e. si

$$F_1(x, \lambda) \equiv F_2(h(x, \lambda), \varphi(\lambda)), \qquad (**)$$

où $\Theta(x, \lambda) \equiv (h(x, \lambda), \varphi(\lambda))$.

On dit que les familles sont *R^+-équivalentes* si elles passent l'une à l'autre par un certain difféomorphisme fibré Θ suivi de l'adjonction d'une fonction différentiable de paramètres:

$$F_1(x, \lambda) \equiv F_2(h(x, \lambda), \varphi(\lambda)) + \Phi(\lambda).$$

Des définitions analogues s'appliquent aux germes.

Soient deux germes de familles F_1, F_2 de mêmes paramètres λ mais d'espaces d'arguments x^1, x^2 de dimensions différentes en général. On dit que ces germes sont *stablement R^+-équivalents* s'ils deviennent R^+-équivalents quand on ajoute aux arguments x^i de nouveaux arguments z^i et aux fonctions F_i des formes quadratiques non dégénérées Q_i des nouveaux arguments:

$$F_1 + Q_1 \underset{R+}{\sim} F_2 + Q_2.$$

Théorème. *Deux germes d'applications lagrangiennes sont Lagrange-équivalents si et seulement si les germes de leurs familles génératrices sont stablement R^+-équivalents.*

Avant de démontrer ce théorème, nous considérerons une classe spéciale d'équivalences lagrangiennes de la fibration cotangente au-dessus du grand espace de la fibration auxiliaire.

Conformément au n° 18.5, toute équivalence lagrangienne est produit d'une équivalence linéaire (respectant les fibres) induite par un difféomorphisme du grand espace et d'une translation (respectant les fibres) définie par une fonction sur le grand espace.

Définition. On dit que l'équivalence lagrangienne de la fibration cotangente du grand espace est *fibrée* si le difféomorphisme correspondant du grand espace est fibré (envoie une fibre de la fibration auxiliaire sur une fibre) et si la fonction correspondante sur le grand espace est constante le long de chaque fibre.

Proposition. *L'équivalence lagrangienne de la fibration cotangente du grand espace est fibrée si et seulement si elle renvoie l'espace mixte A sur lui-même.*

Démonstration de la proposition. 1. Le difféomorphisme fibré du grand espace induit une Lagrange-équivalence conservant l'espace mixte, car l'espace mixte est défini par la fibration auxiliaire.

2. La translation définie par une fonction $S(\lambda)$ constante le long de la fibre s'écrit $(x, y, \lambda, \varkappa) \mapsto (x, y, \lambda, \varkappa + \partial S/\partial\lambda)$ et renvoie sur elle-même la variété de A définie par $y = 0$.

Il ressort de 1 et 2 que l'équivalence fibrée renvoie A sur lui-même.

3. Soit une équivalence lagrangienne telle que A revienne à lui-même. Considérons le complémentaire orthogonal gauche ann α de l'espace tangent α à A. L'équivalence lagrangienne envoyant A sur A préserve le champ des plans ann α sur A et la structure affine des fibres de la fibration cotangente. Or, ann α est l'espace tangent à la fibre de la fibration $A \to T^*\mathbf{R}^l$. L'équivalence lagrangienne en question renvoie donc sur lui-même le champ des plans parallèles à l'x-espace. Il s'ensuit que le difféomorphisme correspondant du grand espace est fibré. Puisque A (où $y = 0$) revient à lui-même, la fonction définissant la translation est indépendante de x. Il en découle que l'équivalence lagrangienne renvoyant A sur A est fibrée. La proposition est démontrée.

Corollaire. *Une équivalence lagrangienne fibrée induit une équivalence lagrangienne de la fibration cotangente de la base de la fibration auxiliaire.*

19.5. Démonstration du théorème d'équivalence. A) Soit une R^+-équivalence de la famille génératrice F_1 avec une famille F_2. Montrons que *F_2 est une famille génératrice elle aussi et que les germes d'applications lagrangiennes définis par F_1 et F_2 sont Lagrange-équivalents.*

a) A partir de la R^+-équivalence, construisons l'équivalence lagrangienne fibrée: si $F_1(x, \lambda) = F_2(h(x, \lambda), \varphi(\lambda)) + \Phi(\lambda)$, alors le difféomorphisme fibré $\Theta = (h, \varphi)$ du grand espace et la translation déterminée par Φ définissent une équivalence lagrangienne fibrée.

b) Cette équivalence lagrangienne fibrée transforme un germe de section lagrangienne M_1 de la grande fibration cotangente défini par la fonction génératrice F_1 en un germe de section lagrangienne M_2 avec la fonction génératrice F_2 (voir les formules du n° 18.5). Il en découle que M_2 est transversale à A. Par conséquent, F_2 est une famille génératrice.

c) L'équivalence lagrangienne de la fibration cotangente de la base de la fibration auxiliaire, induite par l'équivalence fibrée que

nous venons de construire, transforme un germe lagrangien défini par la famille génératrice F_1 en un germe défini par la famille génératrice F_2. L'assertion A) est démontrée.

B) Soit une équivalence lagrangienne de la fibration cotangente de la base de la fibration auxiliaire par laquelle un germe de variété lagrangienne L_1 défini par la famille génératrice F_1 est appliqué sur un germe de variété lagrangienne L_2.

Alors L_2 *se laisse définir par une famille génératrice* F_2 *qui est* R^+*-équivalente à* F_1.

En effet, considérons le produit direct de l'équivalence fibrée donnée de l'espace de la fibration cotangente de la base de coordonnées $(\lambda, \varkappa)$ par la transformation identique $(x, y) \mapsto (x, y)$. C'est une équivalence lagrangienne fibrée de la fibration cotangente du grand espace. Elle applique un germe de section lagrangienne M_1 défini par la fonction F_1 sur un germe de section lagrangienne M_2. Or, M_2 est défini par la fonction génératrice F_2, donc F_2 est la famille génératrice cherchée.

C) *Deux familles génératrices stablement* R^+*-équivalentes définissent des germes qui sont Lagrange-équivalents.*

En effet, deux familles génératrices $F(x, \lambda)$ et $F(x, \lambda) \pm z^2$ (aux paramètres λ) définissent un même germe lagrangien:

$$\{\lambda, \varkappa: \exists x: \partial F/\partial x = 0, \ \varkappa = \partial F/\partial\lambda\} = \\ = \{\lambda, \varkappa: \exists x, z: \partial F/\partial x = 0, \quad z = 0, \quad \varkappa = \partial F/\partial\lambda\}.$$

D) *Deux familles génératrices qui définissent un même germe lagrangien sont stablement* R^+*-équivalentes.*

C'est la partie la plus importante de la démonstration.

a) *Réduction au cas* $\partial^2F/\partial x^2 = 0$. D'après le lemme de Morse généralisé (nº 11.1), il existe un germe de difféomorphisme $(x, \lambda) \mapsto$ $\mapsto (u, v, \lambda)$ tel que $F(x, \lambda) = F_1(u, \lambda) + Q(v)$, où Q est une forme quadratique non dégénérée et $\partial^2F_1/\partial u^2$ s'annule au point considéré.

Considérons F_1 comme une famille de fonctions de u aux paramètres λ. C'est une famille génératrice qui définit le même germe lagrangien que F.

Ainsi donc, toute famille génératrice du germe donné est stablement R^+-équivalente à une famille génératrice telle que $\partial^2F/\partial x^2 = 0$, i.e. à une famille génératrice dont la fibre de la fibration auxiliaire est de la plus petite dimension possible (égale à celle du noyau de la dérivée de l'application lagrangienne). Une telle famille génératrice sera appelée *minimale.*

b) L'assertion D) découle de a) et de la proposition suivante:

Les familles génératrices minimales d'un même germe lagrangien sont R^+*-équivalentes.*

c) *Réduction au cas d'une famille génératrice spéciale.* Nous avons déjà signalé que tout germe lagrangien admet une fonction génératrice avec un nombre minimal d'arguments pathologiques $\varkappa_j$, $j \in J$

(égal à la dimension k du noyau de l'application lagrangienne):

$$\varkappa_I = \partial S/\partial \lambda_I, \quad \lambda_J = -\partial S/\partial \varkappa_J$$

(ici $(\lambda, \varkappa) \mapsto \lambda$ est la fibration cotangente de l'espace $\mathbf{R}^l$). Choisissons une fois pour toutes la famille des k arguments pathologiques.

Proposition. *Pour la famille génératrice minimale $F(x, \lambda)$ définissant le germe lagrangien considéré on a* $\det(\partial^2 F/\partial x\, \partial \lambda_J) \neq 0$.

D é m o n s t r a t i o n. La condition de transversalité pour laquelle le germe lagrangien est défini par une fonction génératrice à k arguments pathologiques $\varkappa_j$, $j \in J$, veut que les k formes $d\varkappa_j$ soient indépendantes sur le noyau de l'application lagrangienne, i.e. que l'application associant au vecteur η du noyau un vecteur aux composantes $d\varkappa_J(\eta)$ soit non dégénérée. Puisque la famille est minimale, cette application linéaire $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ se définit par la matrice $\partial^2 F/\partial x\, \partial \lambda_J$. On a donc $\det(\partial^2 F/\partial x\, \partial \lambda_J) \neq 0$.

Définition. Une famille génératrice minimale F est appelée *spéciale* si pour $\partial F/\partial x = 0$ on a $x = \partial F/\partial \lambda_J$.

L'assertion b) découle des deux lemmes suivants:

Lemme 1. *Un germe de famille génératrice minimale est R^+-équivalent à un germe de famille génératrice spéciale qui définit le même germe lagrangien.*

Lemme 2. *Les germes de deux familles génératrices spéciales définissant un même germe lagrangien sont R^+-équivalents.*

d) D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e 1. Soit F une famille génératrice minimale. Alors $\det(\partial^2 F/\partial x\, \partial \lambda J) \neq 0$.

Soit $\varkappa_J(x, \lambda) = \partial F/\partial \lambda_J$. L'application $(x, \lambda) \mapsto (\varkappa_J(x, \lambda), \lambda)$ définit un difféomorphisme fibré du grand espace. L'équivalence lagrangienne induite fait passer la section lagrangienne M définie par la fonction génératrice F à une nouvelle section lagrangienne.

Cette section est définie par une famille génératrice *spéciale*. En effet, cette famille génératrice est de la forme $F_1(x, \lambda) \equiv F(u(x, \lambda), \lambda)$, où $(x, \lambda) \mapsto (u(x, \lambda), \lambda)$ est l'inversion de l'application $(x, \lambda) \mapsto (\varkappa_J(x, \lambda), \lambda)$. De $\partial F_1/\partial x = 0$ il découle que $\partial F/\partial u = 0$, donc pour $\partial F_1/\partial x = 0$ on a $\partial F_1/\partial \lambda = \partial F/\partial \lambda = \varkappa_J(u(x, \lambda), \lambda) = x$, ce qui montre que F_1 est une famille spéciale. Les germes F et F_1 définissent un même germe lagrangien et sont R^+-équivalents. Le lemme 1 est démontré.

e) D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e 2. Soit F une famille génératrice du germe lagrangien. Considérons l'*ensemble de ses points critiques*:

$$N = \{x, \lambda : \partial F/\partial x = 0\}.$$

Cet ensemble est naturellement difféomorphe à notre germe lagrangien.

Proposition. *Soient F_0, F_1 deux familles génératrices spéciales d'un même germe. Alors:*

1) *leurs ensembles des valeurs critiques se confondent: $N_0 = N_1 = N$;*
2) *leurs restrictions à N coïncident à une constante additive près;*
3) *la différentielle totale de $F_0 - F_1$ est nulle en tout point de N.*

Démonstration. 1) Puisque F_i est spéciale, N_i est l'image de notre germe lagrangien par l'application qui au point $(\varkappa, \lambda)$ associe le point $(\varkappa_J, \lambda)$. Par conséquent, N_i est indépendant de i. 2) Les points de notre germe lagrangien sont paramétrés par les valeurs λ_I et $\varkappa_J$. En particulier, les $\varkappa$ se définissent en fonction de λ_I et de x. Donc $\partial F_i/\partial\lambda$ est défini aux points de N de façon unique par le germe lagrangien et ne dépend pas de i. D'où 3) et, par suite, 2).

Soient F_0, F_1 deux familles génératrices spéciales d'un même germe lagrangien, telles que les valeurs de F_0 et de F_1 au point initial soient les mêmes. Conformément à la proposition précédente, $F_0 - F_1$ admet sur l'ensemble des valeurs critiques N un zéro d'ordre *deux* au moins.

Joignons F_0 à F_1 par une homotopie $F_t = F_0 + t(F_1 - F_0)$. F_t est une famille génératrice spéciale du même germe. Cherchons une famille de difféomorphismes G_t dépendant différentiablement de $t \in [0, 1]$, $G_t(x, \lambda) \equiv (g(x, \lambda, t), \lambda)$, telle que $F_t \circ G_t = F_0$ (plus exactement, G_t est un germe de difféomorphisme qui laisse invariant le point considéré). Le germe de difféomorphisme G_1 établit la R-équivalence des familles F_0 et F_1, ce qui démontre le lemme 2.

Dérivons la relation $F_t \circ G_t = F_0$ par rapport à t. Il vient

$$(F_1 - F_0) + \sum \xi_i(\partial F_t/\partial x_i) = 0. \qquad (***)$$

C'est l'équation par rapport aux composantes du champ vectoriel $\xi = \sum \xi_i(x, \lambda, t)\,\partial/\partial x_i$ des vitesses de la famille de difféomorphismes G_t, champ qui dépend de t.

Considérons dans l'espace muni de coordonnées (x, λ, t) la variété $N' = N \times \{t\}$. Les équations $\partial F_t/\partial x_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, forment un système d'équations indépendantes de cette variété. D'après le lemme de Hadamard, toute fonction s'annulant sur cette variété se laisse mettre sous forme de combinaison linéaire des $\partial F_t/\partial x_i$ (à coefficients fonctionnels). Aussi toute fonction Φ admettant sur N un zéro d'ordre deux peut-elle s'écrire sous la forme

$$\Phi(x, \lambda, t) = \sum \xi_i(x, \lambda, t)\,\partial F_t/\partial x_i, \quad \xi_i \mid N' \equiv 0.$$

En particulier, on s'assure en posant $\Phi = F_0 - F_1$ que l'équation (***) est résoluble et que $\xi \mid N' \equiv 0$.

Le champ de vecteurs $\xi = \xi(t)$ que nous venons de construire s'annule sur N et définit donc, au voisinage du point considéré, les difféomorphismes G_t pour tout $t \in [0, 1]$. Le difféomorphisme G_1 est fibré [est de la forme $G_1(x, \lambda) = (H(x, \lambda), \lambda)$] et $F_1 \circ G_1 = F_0$. Donc F_1 est R-équivalente à F_0, ce qu'il fallait démontrer.

§ 20. Singularités legendriennes

Portons le long de chaque normale intérieure à une ellipse un segment de longueur t. Les extrémités libres de ces segments forment une courbe appelée *front* (on entend par là le front de la perturbation se propageant vers l'intérieur de l'ellipse pendant le temps t).

Si t est petit, le front est lisse, mais pour un t grand le front présente des singularités (quatre points de rebroussement). Des singularités analogues existent sur le front qui se propage au départ d'une courbe proche d'une ellipse. Dans ce paragraphe nous développons une technique adaptée à l'étude des singularités des fronts : la théorie des singularités legendriennes.

20.1. Variétés de contact. La définition la plus générale du front est donnée en termes de géométrie de la structure de contact.

On appelle *structure de contact* sur une variété, un champ d'hyperplans *) qui vérifie la *condition de non-intégrabilité maximale* : si α est une 1-forme qui définit localement un champ d'hyperplans donné (comme champ de ses sous-espaces nuls), la 2-forme $d\alpha$ sur chaque plan $\alpha = 0$ est non dégénérée.

Les plans du champ sont appelés *plans de contact*. Chaque 1-forme α définissant localement un champ de plans de contact est une *forme de contact*. (Elle n'est définie que localement et qu'à une multiplication par une fonction non nulle près). On vérifie sans peine que la condition de non-dégénérescence ne dépend pas du choix de la forme de contact spéciale mais seulement du champ d'hyperplans.

Puisque les formes bilinéaires alternées non dégénérées n'existent que dans des espaces de dimension paire, une structure de contact n'est possible que sur une variété de dimension impaire.

Exemple 1. Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{2n+1}$ muni de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n ; y_1, \ldots, y_n ; z)$ on définit la *structure de contact standard* par la forme $\alpha = dz - y\,dx$ (la non-intégrabilité est évidente).

Exemple 2. Soient V une variété différentiable de dimension n et $J^1(V, \mathbf{R})$ la variété des 1-jets de fonctions sur V. Cette variété de dimension $2n + 1$ a une structure de contact naturelle : les hyperplans sont les adhérences des réunions d'espaces tangents aux 1-graphes de fonctions $f: V \to \mathbf{R}$ (on entend par 1-graphe de fonction f l'image de l'application qui au point x associe le 1-jet de f en x).

On s'assure facilement que la construction proposée définit bien une structure de contact : à cet effet, il suffit de munir l'espace des jets de coordonnées locales. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ des coordonnées locales sur V, z, la coordonnée locale dans $\mathbf{R}$, et soient

*) De plans de codimension un dans les espaces tangents.

$(y_1, \ldots, y_n)$ les valeurs des dérivées partielles premières de la fonction $z = f(x)$. Alors la structure de contact J^1 est localement définie par $\alpha = dz - y\,dx$ comme dans l'exemple 1.

Exemple 3. Soit B une variété différentiable. Un *élément de contact* sur B est un hyperplan dans un espace tangent à B.

L'ensemble de tous les éléments de contact tangents à B au point donné b forme un espace projectif PT_b^*B (c'est la projectivisation de l'espace cotangent à B en b). L'ensemble de tous les éléments de contact sur B forme la *variété des éléments de contact* de dimension $2 \dim B - 1$ (l'espace de la fibration projective cotangente de B, noté PT^*B). L'espace PT^*B se munit d'une structure de contact naturelle définie de la façon suivante : la vitesse de déplacement d'un élément de contact appartient à l'hyperplan de contact chaque fois que la vitesse de déplacement du point d'application appartient à cet élément de contact.

Théorème de Darboux (sur les structures de contact). *Toutes les structures de contact sur une variété de dimension donnée sont localement équivalentes (difféomorphes).*

Autrement dit, *au voisinage de chaque point de la variété de contact la structure de contact se définit en coordonnées convenables par la forme* $dz - y\,dx$.

Théorème de Darboux (sur les formes de contact). *Toutes les formes de contact sur une variété de dimension donnée sont localement équivalentes (difféomorphes), i.e. s'écrivent en coordonnées convenables* $dz - y\,dx$.

Démonstration. Le théorème sur les structures étant consécutif au théorème sur les formes, c'est ce dernier que nous allons démontrer. Soit α une forme de contact. Considérons la 2-forme alternée $d\alpha$ dans un espace tangent donné. Puisque α est une forme de contact, $d\alpha$ a un 0-espace de dimension un (c'est l'espace des vecteurs ξ tels que $d\alpha(\xi, \cdot) \equiv 0$). Considérons le champ de 0-espaces de α. Les segments des courbes intégrales de ce champ dans un voisinage U du point considéré forment une variété V de dimension paire. Faisons la projection $\rho : U \to V$ le long des courbes intégrales. *La forme $d\alpha$ se projette en une 2-forme ω sur V.* En effet, considérons un plan élémentaire σ de dimension deux sur V, un cylindre $\rho^{-1}\sigma$ de dimension trois et une 3-chaîne cylindrique c formée par la partie de ce cylindre comprise entre deux sections σ' et σ'' de la fibration ρ au-dessus de σ. L'intégrale de $d\alpha$ étendue à la surface latérale du cylindre c est nulle, aussi les intégrales de $d\alpha$ étendues à σ' et σ'' ont-elles même valeur, qui est précisément la valeur de l'intégrale de ω étendue à σ. On a alors $d\alpha = \rho^*\omega$.

La forme ω est fermée et non dégénérée (puisque telle est la restriction de $d\alpha$ à une transversale aux courbes intégrales, car α est une forme de contact). D'après le théorème symplectique de Darboux, il

existe sur V des coordonnées (locales) (p, q) telles que $\omega = -\Sigma dp_i \wedge \wedge dq_i$. Posons $x_i = \rho^* q_i$, $y_i = \rho^* p_i$, alors $\rho^* (p\, dq) = y\, dx$. Donc $d(-y\, dx) = d\alpha$ et, par suite, $d(\alpha + y\, dx) = 0$. Définissons sur U une fonction locale z telle que $\alpha + y\, dx = dz$. On vérifie sans peine que les fonctions (x, y, z) définissent le système de coordonnées cherché : $\alpha = dz - y\, dx$.

Remarque. Il y a des cas où la forme α et la variété quotient symplectique V sont définies globalement. Considérons par exemple la fibration sphérique cotangente de l'espace euclidien $ST^*\mathbf{R}^n = \{x \in \mathbf{R}^n,\ y \in \mathbf{R}^n:\ |y| = 1\}$ avec une forme de contact induite de $y\, dx$. La variété quotient V est la variété des droites orientées dans $\mathbf{R}^n$; sa structure symplectique a déjà été décrite au n° 18.2.

20.2. Sous-variétés legendriennes. Une sous-variété d'une variété de contact est dite *intégrale* si son plan tangent en chaque point appartient au plan de contact.

La dimension de toute variété intégrale est toujours inférieure à la moitié de celle de la variété de contact (car la forme de contact sur le plan de contact est non dégénérée). Les variétés intégrales de la plus grande dimension possible (égale à la moitié de la dimension du plan de contact) sont appelées les *sous-variétés legendriennes* de la variété de contact.

Exemple 1. Le plan $x =$ Cte, $z =$ Cte dans un espace de contact standard muni de coordonnées x, y, z et de la forme $\alpha = dz - y\, dx$ est legendrien.

Exemple 2. Le 1-graphe de toute fonction est une sous-variété legendrienne de la variété de contact des 1-jets de fonctions.

Exemple 3. L'ensemble de tous les éléments de contact tangents à une hypersurface donnée d'une variété B est une sous-variété legendrienne de l'espace de la fibration projective cotangente PT^*B.

L'ensemble des éléments de contact tangents à une sous-variété donnée de toute codimension positive dans B (par exemple, à un point) est encore une variété legendrienne. En particulier, les fibres de la fibration projective cotangente $PT^*B \to B$ sont legendriennes.

Proposition. *La projection locale* ρ (*construite dans le n°* 20.1) *d'une variété de contact sur une variété symplectique définit des difféomorphismes locaux de sous-variétés legendriennes de l'espace de contact sur des sous-variétés lagrangiennes de l'espace symplectique. On obtient par ce procédé toutes les sous-variétés lagrangiennes de l'espace symplectique. Un germe legendrien se définit de façon unique par un de ces points et par son image lagrangienne.*

Démonstration. La difféomorphie locale découle de la transversalité des espaces nuls de α et $d\alpha$. L'image est bien lagran-

gienne, car la restriction de $d\alpha$ à une sous-variété legendrienne est égale à 0. Le reste est évident ($z = \int y\,dx$).

Corollaire. *Tout germe de sous-variété legendrienne dans un espace de contact de dimension $2n + 1$ avec la forme de contact $\alpha = dz - y\,dx$ se définit par une des 2^n fonctions génératrices S d'après les formules*

$$y_I = \partial S/\partial x_I, \quad x_J = -\partial S/\partial y_J, \quad z = S(x_I, y_J) + \langle x_J, y_J\rangle,$$

où (I, J) est une partition de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ en parties disjointes.

20.3. Fibrations legendriennes. Une fibration $\pi: E^{2n+1} \to B^{n+1}$ est dite *legendrienne* si son espace E est muni d'une structure de contact et ses fibres sont des sous-variétés legendriennes.

Exemple 1. $\mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$, $\alpha = dz - y\,dx$, $\pi(x, y, z) = (x, z)$ est une *fibration legendrienne standard.*

Exemple 2. $J^1(M, \mathbf{R}) \to J^0(M, \mathbf{R}) = M \times \mathbf{R}$ (application de l'oubli des dérivées).

Exemple 3. $\pi: PT^*B \to B$ (*fibration projective cotangente*).

Exemple 4. L'espace $PT^*\mathbf{R}^n$ des éléments de contact dans $\mathbf{R}^n$ est fibré par fibres legendriennes encore d'une façon: au-dessus d'un *espace d'hyperplans dans* $\mathbf{R}^n$. Cette fibration fait correspondre à un élément de contact le plan qui le contient. D'une façon analogue, les *éléments de contact orientés* forment un espace fibré au-dessus de la variété d'*hyperplans orientés* dans $\mathbf{R}^n$.

Par passage au quotient indiqué dans la démonstration du théorème de Darboux (voir la remarque dans le n° 20.1), cette fibration legendrienne devient fibration lagrangienne, notamment fibration cotangente d'une sphère. (Vérifier !)

Théorème. *Toutes les fibrations legendriennes d'une dimension donnée sont localement contactomorphes (localement = au voisinage de tout point de l'espace de la fibration).*

Démonstration. Soient $\pi: E^{2n+1} \to B^{n+1}$ une fibration legendrienne, α la 1-forme de contact, K le plan de contact en un point de E, F le plan tangent à la fibre en ce point ($\dim K = 2n$, $\dim F = n$). Par définition, F est dans K, aussi l'image de K par la projection $\pi_*: TE \to TB$ est-elle de dimension n, ce qui signifie que c'est un élément de contact sur B.

Nous avons donc construit une application de E dans PT^*B par laquelle les fibres de π sont envoyées sur celles de la fibration projective cotangente au-dessus de B. Montrons que cette application est un difféomorphisme local.

Introduisons sur B des coordonnées locales $(q_1, \ldots, q_n, r)$ d'origine en le point considéré ; l'élément de contact considéré sera

alors d'équation $dr = 0$. Définissons sur E des coordonnées locales $(x_i = \pi^* q_i,\ z = \pi^* r,\ p_1, \ldots, p_n)$ d'origine en le point étudié.

La forme de contact sur E s'annule pour dx_i et dz nulles, étant proportionnelle à dz en 0. On peut donc choisir comme forme de contact $\alpha = dz - \Sigma y_i\, dx_i$, où les fonctions y_i des (x, p, z) sont nulles en 0.

Avec ces notations la propriété de non-dégénérescence que nous cherchons à démontrer implique la non-nullité du jacobien det $(\partial y/\partial p)$ en 0. Si ce déterminant était nul, il existerait un vecteur non nul ξ tangent à la fibre en 0 (si bien que $dx\,(\xi) = 0$, $dz\,(\xi) = 0$), tel que $dy\,(\xi) = 0$. Or, il y aurait alors, pour un vecteur η quelconque, $d\alpha\,(\xi, \eta) = -\Sigma\,(dy_i \wedge dx_i)\,(\xi, \eta) = 0$, ce qui contredit la non-dégénérescence de $d\alpha$ sur K. L'application décrite est donc bien un difféomorphisme local.

Nous avons montré en même temps que les fonctions y_i forment avec x et z un système de coordonnées locales sur E. En ces coordonnées $\alpha = dz - y\, dx$, $\pi\,(x, y, z) = (x, z)$, ce qui prouve que notre fibration est localement contactomorphe à la fibration standard.

20.4. Equivalence legendrienne. On dit que deux fibrations sont *Legendre-équivalentes* s'il existe un contactomorphisme d'espaces de fibration (dit *équivalence legendrienne*) qui applique les fibres de la première fibration sur des fibres de la seconde.

Exemple. Considérons la fibration projective cotangente $PT^*B \to B$. Chaque difféomorphisme de la base agit sur les éléments de contact sur la base. On obtient une application de l'espace de fibration PT^*B dans elle-même qui est une équivalence legendrienne (car elle applique projectivement chaque fibre).

Théorème. *Toute équivalence legendrienne d'un germe de fibration projective cotangente dans elle-même est induite par un difféomorphisme local de la base.*

D é m o n s t r a t i o n. Toute équivalence legendrienne induit un difféomorphisme de la base. Si le difféomorphisme est identique, chaque plan de contact reste invariant (car le difféomorphisme laisse invariant l'élément de contact dans lequel ce plan est projeté, et les différents plans de contact ont des éléments de contact différents). L'équivalence legendrienne se définit donc de façon unique par le difféomorphisme de la base qu'elle induit.

Remarque. La structure de toute fibration legendrienne munit les fibres d'une structure d'espace localement projectif: toute équivalence legendrienne définit des transformations projectives de fibres et est induite par un difféomorphisme de la base (cf. les deux derniers théorèmes).

20.5. Applications legendriennes. Considérons un plongement, dans l'espace de la fibration legendrienne $\pi: E \to B$, d'une autre sous-variété legendrienne $(i: L \to E)$. La restriction de la projection π à L, i.e. $\pi \circ i: L \to B$, s'appelle *application legendrienne.*

Les applications legendriennes ont comme but une variété de dimension d'une unité supérieure à celle de la source. Elles forment une classe spéciale d'applications de variétés de dimension n dans des variétés de dimension $n+1$: les singularités génériques dans la classe de toutes les applications et dans celle des applications legendriennes sont différentes.

Exemple 1. Considérons la fibration standard $\pi: \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$, $\pi(x, y, z) = (x, z)$, avec la structure de contact $\alpha = dz - y\, dx$. Définissons une variété legendrienne de fonction génératrice S par

$$x = \partial S/\partial y, \quad z = \langle x, y \rangle - S(y)$$

(cf. n° 20.2, I vide). La projection π de cette variété legendrienne sur $\mathbf{R}^{n+1}$ définit une application legendrienne. L'image de cette application est une hypersurface dans $\mathbf{R}^{n+1}$ (singulière en général).

Dans le cas où la fonction S est convexe, l'image est lisse et représente le graphe d'une fonction $z = T(x)$. Ce T est appelé la *transformée de Legendre* de la fonction initiale S.

Exemple 2. L'*application tangentielle* qui à tout point d'une hypersurface dans $\mathbf{R}^n$ fait correspondre l'hyperplan tangent en ce point est legendrienne (la fibration legendrienne correspondante a été décrite dans l'exemple 4 du n° 20.3). Est aussi legendrienne une application analogue d'une *hypersurface orientée* dans une variété d'*hyperplans orientés* de $\mathbf{R}^n$. A la suite du passage au quotient décrit dans la démonstration du théorème de Darboux (voir la remarque dans le n° 20.1) cette application legendrienne devient lagrangienne, exactement une application de Gauss de l'hypersurface initiale. (Pourquoi ?)

Deux applications legendriennes sont *équivalentes* s'il existe une équivalence legendrienne de fibrations legendriennes correspondantes par laquelle la première sous-variété legendrienne est appliquée dans la seconde.

On montre que toute application legendrienne est localement équivalente à l'application décrite dans l'exemple 1. En ce sens toutes les singularités legendriennes se réduisent à celles des transformations de Legendre (avec coïncidence des phénomènes génériques, etc.).

20.6. Fronts. L'image par une application legendrienne est appelée *front* (de la variété legendrienne appliquée).

Exemple. Considérons une sous-variété différentiable (de codimension positive quelconque) dans l'espace euclidien. Portons le long de chaque normale un segment de longueur t. Les extrémités libres de segments forment un front (ce que nous montrerons tout de suite).

D'une façon plus générale, considérons, au lieu de la longueur euclidienne, une « fonctionnelle géométrique » quelconque du calcul variationnel, i.e. une fonction quelconque H sur l'espace de fibration cotangente d'une variété différentiable B, fonction qui est homogène de degré 1 par rapport aux impulsions:

$$H: (T^*B \setminus B) \to \mathbf{R}, \quad H(\lambda\xi) = \lambda H(\xi) \quad \forall \lambda > 0.$$

On suppose que H ne s'annule pas en dehors de la section nulle.

Soit E un ensemble de niveau non nul de H (défini par $H = h$, $h \neq 0$). La variété E est transversale aux fibres de la fibration $\pi: T^*B \setminus B \to PT^*B$. La structure de contact de la variété des éléments de contact PT^*B est communiquée à E par le difféomorphisme local $\pi \mid E$.

Théorème. *Le flot des équations de Hamilton sur E préserve la structure de contact.*

Corollaire. *Le flot des équations de Hamilton sur E fait passer une sous-variété legendrienne à une sous-variété legendrienne.*

Exemple. Soit B un espace riemanien, $H = |p|$, $h = 1$. Dans ce cas E est une fibration cotangente sphérique, i.e. variété des éléments de contact de B orientés transversalement. Pendant le temps t le flot déplace chaque élément de contact d'une distance t vers l'avant suivant la géodésique perpendiculaire à l'élément, tout en conservant la perpendicularité. Pour toute sous-variété dans B, les éléments de contact orientés transversalement et tangents à cette sous-variété forment une sous-variété legendrienne. D'après le corollaire, leurs translatés forment aussi une sous-variété legendrienne au bout d'un temps t.

La projection de cette variété legendrienne sur B est une équidistante de la variété initiale (l'ensemble des extrémités libres des segments de normales géodésiques de longueur t à la variété initiale). Par conséquent, *l'équidistante est le front d'une variété legendrienne.*

Remarque. On montre que toutes les singularités legendriennes sont réalisées déjà pour les équidistantes d'hypersurfaces dans l'espace euclidien. En ce sens l'étude des singularités legendriennes se réduit à l'étude des équidistantes (on montre qu'à des singularités legendriennes voisines correspondent les équidistantes d'hypersurfaces proches, et réciproquement, si bien que les singularités génériques sont les mêmes pour les fronts de variétés legendriennes que pour les équidistantes).

Démonstration du théorème. 1° La structure de contact sur E induite de PT^*B se définit en faisant la restriction à E de la 1-forme canonique $p\,dq$ sur T^*B. Montrons que *les complémentaires orthogonaux gauches des zéros de cette forme sont les espaces tangents aux fibres de la fibration* π (aux points de T^*B qui n'appartiennent pas à la section nulle de la fibration cotangente).

En effet, la forme $p\,dq$ s'annule le long de toute courbe dont la π-projection est intégrale pour la structure de contact. Aussi l'intégrale de la forme de la structure symplectique $dp \wedge dq$ est-elle nulle suivant chaque plan élémentaire qui se projette en une courbe intégrale. Par conséquent, en chaque point l'hyperplan des zéros de $p\,dq$ et la tangente à la fibre de π sont orthogonaux gauches, i.e. sont complémentaires orthogonaux gauches l'un de l'autre.

2° *Le flot de fonction de Hamilton H sur $T^*B \setminus B$ commute avec la multiplication de tous les vecteurs cotangents par une constante positive.*

En effet, à la suite d'une telle dilatation du vecteur la structure symplectique $dp \wedge dq$ et la fonction de Hamilton se trouvent multipliées par un même facteur, si bien que le champ de vecteurs de Hamilton reste inchangé.

3° Conformément à 1°, la structure de contact sur E est définie en termes de structure symplectique sur $T^*B \setminus B$ et du champ des tangentes aux fibres de π. Le flot de fonction de Hamilton H préserve la sous-variété E, la structure symplectique et (d'après 2°) le champ des tangentes aux fibres de π. Il préserve donc aussi le champ des complémentaires orthogonaux gauches, i.e. la structure de contact sur E.

Le théorème est démontré.

Remarque. Le front d'une variété legendrienne est en général de codimension un dans l'espace ambiant (les germes pour lesquels cette codimension est plus grande forment un ensemble de codimension ∞ dans l'espace de tous les germes legendriens).

Une sous-variété legendrienne dans PT^*B ayant comme front une hypersurface différentiable dans B se laisse reconstituer sans ambiguïté d'après cette hypersurface : c'est l'ensemble de ses plans tangents.

En ce sens l'action de l'équivalence legendrienne sur une singularité legendrienne se réduit à l'action d'un difféomorphisme correspondant de la base sur le front. Cette remarque vaut non seulement pour les applications aux fronts différentiables mais aussi pour les applications où l'ensemble des points de régularité est dense dans la variété legendrienne initiale (cette dernière condition ne cesse d'être vraie que pour les germes legendriens qui forment un ensemble de codimension ∞ dans l'espace de tous les germes legendriens).

20.7. Familles génératrices. Nous savons que les variétés lagrangiennes sont liées aux fonctions et les singularités lagrangiennes à celles des familles de fonctions ; dans le même ordre d'idées, les variétés legendriennes sont liées aux hypersurfaces et les singularités legendriennes à celles des familles d'hypersurfaces.

Considérons un germe de sous-variété legendrienne de l'espace de la fibration projective cotangente transversale aux fibres. Une telle variété a un front non singulier. Ce front est appelé *hypersurface génératrice* du germe initial.

Les équivalences legendriennes opèrent sur l'hypersurface génératrice comme des difféomorphismes de la base.

On construit les familles génératrices legendriennes d'hypersurfaces à partir d'hypersurfaces génératrices de la même façon que les familles génératrices lagrangiennes se construisent à partir de fonctions génératrices.

Soit ρ: $\mathbf{R}^{k+l} \to \mathbf{R}^l$ une « fibration auxiliaire » ; nous appellerons $\mathbf{R}^{k+l}$ le *grand espace* et $\mathbf{R}^l$ la *base*. Un élément de contact au grand espace ou bien traverse le plan tangent à la fibre de la fibration auxiliaire suivant une hypersurface, ou bien contient ce plan tout entier. Dans le second cas l'élément de contact est dit ρ-*singulier*. Les éléments ρ-singuliers constituent une sous-variété de la variété de tous les éléments de contact $PT^*\mathbf{R}^{k+l}$. On l'appelle *espace mixte* pour ρ et on la note PA. La variété PA est naturellement fibrée au-dessus du grand espace (l'application fibrante est définie par la projection de ρ). La fibre de cette fibration est isomorphe à l'espace cotangent projectif de la base de ρ (comme variété de tous les éléments de contact du grand espace qui contiennent un plan tangent donné de la fibre de ρ).

Définition. Une variété legendrienne définie par une hypersurface génératrice est appelée ρ-*régulière* si elle est transversale à l'espace mixte PA de la fibration auxiliaire ρ.

Théorème. 1° *La projection naturelle de l'intersection d'une variété legendrienne ρ-régulière avec l'espace mixte PA de la fibration auxiliaire ρ dans l'espace de la fibration projective cotangente de la base de ρ est une immersion de la variété legendrienne.*

2° *On peut obtenir tout germe de sous-variété legendrienne de la fibration projective cotangente de la base au moyen de la construction précédente à partir d'une sous-variété ρ-régulière (engendrée par une hypersurface génératrice) d'une fibration auxiliaire convenable ρ.*

D é m o n s t r a t i o n d e 1°. Considérons au point d'intersection les plans suivants dans l'espace tangent de la grande fibration projective :

Ω, hyperplan de contact (de dimension $2(k+l)-2$) ;

a, plan tangent à l'espace PA (de dimension $k+2l-1$) ;

f, plan tangent à la fibre de $PA \to PT^*\mathbf{R}^l$ (de dimension k) ;

τ, plan tangent à la variété legendrienne considérée (de dimension $k + l - 1$).

On voit sans peine que a est en dehors de Ω et f lui est intérieur, donc leurs intersections avec Ω sont de dimensions respectives

$$\dim (a \cap \Omega) = k + 2l - 2, \quad \dim (f \cap \Omega) = k.$$

Munissons l'espace Ω d'une structure symplectique linéaire définie par la restriction à Ω de la différentielle de la forme de contact.

Proposition. *Les espaces* $a \cap \Omega$ *et* $f \cap \Omega = f$ *sont complémentaires orthogonaux gauches.*

Puisque les dimensions de ces sous-espaces sont complémentaires dans Ω, il suffit de montrer qu'ils sont orthogonaux gauches.

On peut facilement choisir des coordonnées (q, z), $q \in \mathbf{R}^m$, $m = l - 1$, dans $\mathbf{R}^l$ et des coordonnées locales (p, q, z) dans $PT^*\mathbf{R}^l$ d'une part, et des coordonnées $(x, q. z)$ dans $\mathbf{R}^{k+l}$ et des coordonnées locales $(y, p; x, q, z)$ dans $PT^*\mathbf{R}^{k+l}$ de l'autre, de telle façon que:

1) les formes de contact s'écrivent en ces coordonnées $dz - p\,dq$ et $\alpha = dz - y\,dx - p\,dq$ respectivement;

2) PA soit d'équation $y = 0$;

3) la fibration $PA \to PT^*\mathbf{R}^l$ s'écrive sous la forme $(p, x, q, z) \mapsto (p, q, z)$;

4) il y ait $p = 0$, $y = 0$, $-d\alpha = \sum dy_i \wedge dx_i + \sum dp_i \wedge dq_i$ sur le plan Ω.

Soient η un vecteur de $a \cap \Omega$ et ξ un vecteur de $f \cap \Omega$. Dans ces notations

$$dy_i(\xi) = 0, \quad dp_i(\xi) = 0, \quad dq_i(\xi) = 0, \quad dy_i(\eta) = 0,$$

d'où $d\alpha(\xi, \eta) = 0$, ce qui démontre la proposition.

Le complémentaire orthogonal gauche dans Ω sera noté ann. On a $\mathrm{ann}(a \cap \Omega) = (f \cap \Omega)$. Puisque τ est tangent à la variété legendrienne, on a $\alpha \mid \tau = 0$, $d\alpha \mid \tau = 0$, $\dim \Omega = 2 \dim \tau$. Donc $\tau \subset \Omega$ et $\mathrm{ann}\ \tau = \tau$.

Par définition $\tau + (a \cap \Omega) = \Omega$, d'où $(\mathrm{ann}\ \tau) \cap (\mathrm{ann}\,(a \cap \Omega)) = 0$. Alors $\tau \cap (f \cap \Omega) = 0$, d'où $\tau \cap f = 0$. Il s'ensuit que la projection décrite sous 1° est non dégénérée. L'image est legendrienne, puisque $y = 0$ sur PA et que la forme α se réduit à $dz - p\,dq$.

D é m o n s t r a t i o n d e 2°. Conservons les mêmes coordonnées locales (p, q, z) dans $PT^*\mathbf{R}^l$ que précédemment. Soit un germe legendrien au point $p = 0$, $q = 0$, $z = 0$. Un tel germe admet une projection difféomorphe dans l'espace de coordonnées (p, q) le long de l'axe des z. On a sur l'image $dz = p\,dq$, d'où $d\,(p\,dq) = 0$. L'image

est donc un germe lagrangien dans l'espace de coordonnées symplectique $\mathbf{R}^{2(l-1)}$. Le germe legendrien initial est graphe de la fonction $z = \int p\,dq$ sur ce germe lagrangien image.

Or, tout germe lagrangien se définit par une des 2^m fonctions génératrices :

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_J, \quad I \cap J = \varnothing,$$
$$I \cup J = \{1, \ldots, l-1\}.$$

Notre germe legendrien se définit donc par des formules du type

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_J, \quad z = S(q_I, p_J) + \langle p_J, q_J\rangle.$$

Considérons à présent une fibration auxiliaire $\rho\colon \mathbf{R}^{k+l} \to \mathbf{R}^l$ dans laquelle k est égal au nombre des arguments pathologiques (au cardinal de J). Conservons dans $\mathbf{R}^{k+l}$ et dans $\mathbf{R}^l$ les mêmes coordonnées que sous 1°, à savoir: $\rho(x, q, z) = (q, z)$. Considérons dans le grand espace une hypersurface d'équation

$$z = S(q_I, x) + \langle x, q_J\rangle.$$

Elle engendre une variété legendrienne

$$\{y, p; x, q, z\colon y = \partial S/\partial x + q_J, \quad p_I = \partial S/\partial q_I,$$
$$p_J = x, \quad z = S(q_I, x) + \langle x, q_J\rangle\}.$$

Cette variété est transversale à l'espace mixte PA d'équation $y = 0$, car $\partial y/\partial q_J = E$. La projection de son intersection avec PA dans $PT^*\mathbf{R}^l$ est

$$\{p, q, z\colon \exists x\colon q_J = -\partial S/\partial x, \quad p_I = \partial S/\partial q_I,$$
$$z = S(q_I, x) + \langle x, q_J\rangle, \quad x = p_J\},$$

i.e. n'est autre que le germe legendrien initial. Le théorème est démontré.

Définition. Une hypersurface du grand espace qui permet d'exprimer le germe legendrien dans l'espace de la fibration projective cotangente de la base de la fibration auxiliaire ρ de la façon décrite sous 2° est appelée *famille d'hypersurfaces génératrice* pour ce germe legendrien (les éléments de cette famille sont des intersections de l'hypersurface avec les fibres de ρ ; ce sont en général des hypersurfaces singulières dans les fibres mais leur réunion est non singulière).

Remarque. Une hypersurface Γ dans l'espace de $\rho\colon \mathbf{R}^{k+l} \to \mathbf{R}^l$ est une famille génératrice minimale si la restriction de ρ à Γ admet une singularité transversale Σ^k au sens du § 2.

20.8. Equivalence legendrienne de singularités legendriennes et équivalence de familles d'hypersurfaces génératrices.

Définition. On appelle *équivalence fibrée* de familles d'hypersurfaces génératrices Γ_1, Γ_2 dans l'espace de la fibration $\rho\colon \mathbf{R}^{k+l} \to \mathbf{R}^l$, $\rho(x, \lambda) = \lambda$, un difféomorphisme fibré $(x, \lambda) \mapsto (h(x, \lambda), \varphi(\lambda))$ par lequel Γ_1 se transforme en Γ_2.

Théorème. 1° *Deux germes legendriens définis par des familles d'hypersurfaces génératrices liées par une équivalence fibrée sont Legendre-équivalents.*

2° *Tout germe legendrien qui est Legendre-équivalent au germe legendrien donné se laisse définir par une famille d'hypersurfaces génératrice liée par une équivalence fibrée à la famille donnée.*

3° *Toutes les familles d'hypersurfaces génératrices pour le germe legendrien donné sont liées par une équivalence fibrée si, dans ces familles, les fibres de la fibration auxiliaire ont la plus petite dimension possible.*

Démonstration. 1° Une équivalence fibrée de familles d'hypersurfaces induit une équivalence legendrienne de la fibration projective cotangente $PT^*\mathbf{R}^{k+l}$ du grand espace, équivalence qui conserve l'espace mixte PA. Par cette équivalence la variété legendrienne engendrée dans $PT^*\mathbf{R}^{k+l}$ par la première hypersurface se transforme en la variété legendrienne engendrée par la seconde. Aussi l'intersection de la première avec PA se transforme-t-elle en l'intersection de la seconde avec PA.

Une équivalence fibrée engendre un difféomorphisme de la base $\mathbf{R}^l$. L'équivalence legendrienne de $PT^*\mathbf{R}^l$ induite par ce difféomorphisme fait passer la projection de la première intersection à celle de la seconde, ce qui démontre 1°.

2° Soit dans $PT^*\mathbf{R}^l$ une équivalence legendrienne par laquelle un germe legendrien de famille d'hypersurfaces génératrice $\Gamma \subset \mathbf{R}^{k+l}$ se transforme en un nouveau germe legendrien.

Cette équivalence legendrienne est induite par un difféomorphisme de la base, $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$. L'application $(x, \lambda) \mapsto (x, \varphi(\lambda))$ définit précisément l'équivalence fibrée cherchée.

3° Des formules figurant dans la démonstration du théorème du n° 20.7 il ressort que, dans les coordonnées introduites, le germe legendrien défini par une famille d'hypersurfaces génératrice d'équation $z = F(x, q)$ en 0 (forme sous laquelle n'importe quelle famille génératrice peut être définie localement) est germe en 0 de la variété

$$\{p, q, z\colon \exists x\colon \partial F/\partial x = 0,\ p = \partial F/\partial q,\ z = F(x, q)\}. \qquad (**)$$

On vérifie sans peine qu'il est possible de choisir les coordonnées z et $q_1, \ldots, q_{l-1}$ dans $\mathbf{R}^l$ une fois pour toutes pour un germe legendrien donné, quelle que soit sa famille d'hypersurfaces génératrice: il faut seulement que le point initial du germe ait comme coordonnées $z = 0$, $q = 0$, $p = 0$.

La comparaison de la formule (**) avec la formule (*) du n° 19.1 nous amène à faire la conclusion suivante:

Proposition. *La famille d'hypersurfaces génératrice du germe legendrien (**) est graphe de la famille de fonctions génératrice (*) du germe lagrangien qui s'obtient à partir du germe legendrien donné par projection parallèle à l'axe des z. Réciproquement, le graphe de la famille de fonctions génératrice pour ce germe lagrangien est famille d'hypersurfaces génératrice pour le germe initial. La dimension de la fibre de la fibration auxiliaire dans le cas legendrien est minimale si et seulement si elle l'est dans le cas lagrangien.*

En effet, 1) la condition de ρ-régularité se réduit tant dans le cas legendrien que dans le cas lagrangien à celle de résolubilité normale de l'équation $\partial F/\partial x = 0$ par rapport à x ; 2) la dimension minimale de la fibre est égale à celle du noyau de la dérivée de l'application lagrangienne (legendrienne). Ces dimensions coïncident, car sur la variété legendrienne z est une fonction différentiable de (x, q).

Il découle de la proposition que, pour deux familles génératrices minimales d'hypersurfaces $z = F_1(x, q)$, $z = F_2(x, q)$ d'un même germe legendrien, les fonctions génératrices F_1, F_2 sont R^+-équivalentes: $F_2(x, q) = F_1(h(x, q), q) + \Phi(q)$. Leurs graphes sont donc liés par une équivalence fibrée (par rapport à la fibration $\rho(x, q, z) = (q, z)$), ce qui démontre 3°.

Remarque. La même démonstration convient pour décrire toutes les familles d'hypersurfaces génératrices (non nécessairement minimales) d'un germe legendrien donné: ce sont les graphes des familles génératrices stablement R^+-équivalentes du germe lagrangien correspondant.

Définition. Soit $\Gamma \subset M$ une hypersurface différentiable d'équation non dégénérée $f = 0$. On appelle *double* (ou *duplication*) *de* M *ramifié sur* Γ l'hypersurface d'équation $u^2 = f(v)$ dans le produit direct $M \times \mathbf{R}$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in M$. (Dans le cas complexe le double est un revêtement à deux feuillets de M ramifié sur Γ ; le type réel du double dépend du choix de la face de Γ.)

On dit que deux familles d'hypersurfaces (dans des fibrations auxiliaires de base commune) sont liées par une *équivalence fibrée stable* si on peut les obtenir à partir d'une même famille par duplications successives (à chaque duplication on passe de la fibration auxiliaire $\rho(v) = w$ à la fibration auxiliaire $\rho(u, v) = w$).

En ces termes les résultats précédents peuvent être reformulés ainsi:

Théorème. *Deux germes de familles d'hypersurfaces génératrices définissent des germes Legendre-équivalents si et seulement si elles sont liées par une équivalence fibrée stable.*

Remarque. L'étude précédente des singularités legendriennes fait intervenir le *foncteur de contactisation* qui à un germe de variété

symplectique de dimension n associe un germe de variété de contact de dimension $n + 1$, aux sous-variétés lagrangiennes de la première les sous-variétés legendriennes de la seconde, et ainsi de suite. Il existe aussi le *foncteur de symplectisation* qui à un germe de variété de contact de dimension n associe un germe de variété symplectique de dimension $n + 1$. Le lecteur trouvera dans [339] une tentative de réduire les singularités legendriennes aux singularités lagrangiennes par symplectisation tandis que nous l'avons fait par contactisation.

§ 21. Classification des singularités lagrangiennes et legendriennes

Grâce à la théorie des familles génératrices, l'étude des singularités lagrangiennes et legendriennes se réduit à celle des singularités de familles de fonctions et d'hypersurfaces. Les techniques d'étude des singularités de fonctions développées dans les deux premiers chapitres procurent donc une information substantielle sur les caustiques et les fronts. Ce paragraphe est consacré à la description des résultats obtenus dans cette direction.

21.1. Stabilité lagrangienne.

Définition. On dit qu'une application lagrangienne est *Lagrange-stable* si toute application lagrangienne proche lui est Lagrange-équivalente (dans le cas non compact la proximité s'entend comme toujours au sens de la topologie de Whitney).

On dit qu'un *germe* d'application lagrangienne en un point est *Lagrange-stable* si pour toute application de germe donné il existe un voisinage dans l'espace des applications lagrangiennes (en topologie de la convergence avec un nombre fini de dérivées sur chaque compact) et un voisinage du point initial tels que toute application lagrangienne appartenant au premier voisinage admette dans le second un point en lequel le germe de cette application soit Lagrange-équivalent au germe initial.

Les résultats obtenus dans le premier chapitre et dans le § 18 donnent lieu à un

Théorème. *Un germe d'application lagrangienne définie par une famille de fonctions génératrice $F(x, \lambda)$ de paramètre λ est Lagrange-stable si et seulement si le déploiement F d'une fonction $f = F(\cdot, 0)$ est R^+-versel (ou si l'extension à un paramètre $F(x, \lambda) + \lambda_0$ est un déploiement R-versel).*

Corollaire 1. *Un germe en 0 d'application lagrangienne $(\varkappa, \lambda) \mapsto \lambda$ défini par la variété lagrangienne*

$$\{\lambda, \varkappa : \exists x : \partial F/\partial x = 0, \ \varkappa = \partial F/\partial\lambda\},$$

où

$$\operatorname{rang}(\partial^2 F/\partial x^2,\ \partial^2 F/\partial x\, \partial\lambda)_0 = \dim\{x\},$$

est Lagrange-stable si et seulement si les classes des germes de fonctions $\{1, g_1, \ldots, g_l\ (g_i(x) = \partial F/\partial\lambda_i|_{\lambda=0})\}$ *engendrent l'espace vectoriel*

$$Q_f = \mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_k]]/(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_k),$$

où

$$f(x) = F(x, 0).$$

Corollaire 2. *Tout germe stable d'application lagrangienne peut s'écrire en coordonnées convenables à l'aide d'une fonction génératrice de la forme*

$$S(q_I, p_J) = f(p_J) + \langle q_I, g_I(p_J)\rangle,$$

où les $\{1, p_J\ (j \in J), g_i\ (i \in I)\}$ *engendrent* Q_f *sur* $\mathbf{R}$, *le cardinal de l'ensemble des arguments pathologiques étant égal à la dimension du noyau de la dérivée de l'application en* 0.

Ici la variété lagrangienne est définie par les équations $p_I = \partial S/\partial q_I$, $q_J = -\partial S/\partial p_J$, et la fibration lagrangienne par la projection $(p, q) \mapsto q$.

D é m o n s t r a t i o n. D'après la formule du n° 19.3, la famille génératrice correspondant à S est de la forme

$$F(x, \lambda) = S(\lambda_I, x) + \langle\lambda_J, x\rangle = f(x) + \sum \lambda_i g_i(x) + \sum \lambda_j x_j$$
$$(i \in I,\ j \in J).$$

Vu le corollaire 1, on a la condition de stabilité. Puisque tout déploiement R^+-versel est R^+-équivalent à un déploiement de la forme indiquée, le corollaire 2 est démontré.

Exemple 1. Soient $f(p) = p_1^3$, $J = \{1\}$, $I = \{2, \ldots, n\}$. Alors $n \geqslant 1$ et $S = p_1^3$. L'application est définie par $(p_1, q_2, \ldots, q_n) \mapsto (-3p_1^2, q_2, \ldots, q_n)$. C'est un pli lagrangien. Pour $n = 1$ une application lagrangienne générique ne peut présenter d'autre singularité que celle-ci.

Exemple 2. Soient $f(p) = p_1^4$, $J = \{1\}$, $I = \{2, \ldots, n\}$. Alors $n \geqslant 2$ et $S = \pm p_1^4 + p_1^2 q_2$. L'application est définie par $(p_1, q_2, \ldots, q_n) \mapsto (\mp 4p_1^3 - 2p_1 q_2, q_2, \ldots, q_n)$. C'est une fronce lagrangienne en 0. On montre que pour $n = 2$ les applications lagrangiennes génériques ne peuvent avoir que des singularités équivalentes au sens de Lagrange aux germes des exemples 1 et 2 en 0, i.e. seulement des plis ou des fronces. Le signe de p_1^4 est essentiel : dans le cas lagrangien on a deux fronces non équivalentes.

Corollaire 3. *Tout germe stable d'application lagrangienne est équivalent à un germe gradient* $(p \mapsto -\partial S/\partial p)$ *défini par le germe en* 0

de la fonction

$$S(p) = f(p_J) + \sum (p_i + g_i(p_J))^2, \quad i \in I,$$

où g_i sont les germes qui, avec 1 et $\{p_j\ (j \in J)\}$, engendrent l'espace vectoriel de l'algèbre gradiente

$$Q_f = \mathbf{R}\,[[p_J]]/(\partial f/\partial p_j), \quad j \in J,$$

le cardinal de J pouvant être pris égal au corang (à la dimension du noyau de la dérivée de l'application lagrangienne en 0).

D é m o n s t r a t i o n. Comme coordonnées sur la variété lagrangienne considérée, on peut prendre (p_J, q_I). La variété se définit en ces coordonnées par la fonction génératrice $S'(p_J, q_I) = S(p) + \langle p_I, q_I\rangle$ d'après la formule $q_J = -\partial S'/\partial p_J$, $p_I = \partial S'/\partial q_I$. La famille génératrice correspondant à S' s'écrit

$$F'(x, \lambda) = f(x) - \sum \lambda_i g_i(x) - \sum \lambda_i^2\, 4 + \sum \lambda_j x_j, \quad i \in I, \quad j \in J.$$

Autrement dit, elle est R^+-équivalente à la famille génératrice $F_0(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_i g_i(x) + \sum \lambda_j x_j$ construite d'après la fonction génératrice du corollaire 2.

Remarque. La famille génératrice construite au départ de la fonction génératrice initiale a plus de variables:

$$F(x, \lambda) = f(x_J) + \sum (x_i + g_i(x_J))^2 + \langle x, \lambda\rangle.$$

Elle est stablement R^+-équivalente à F_0. (I n d i c a t i o n: poser $u_i = x_i + g_i(x_J)$.)

Exemple. Les plis et fronces gradients sont définis par les germes en 0 des fonctions $S = p_1^3 \pm p_2^2 \pm \ldots \pm p_n^2$, $S = \varepsilon p_1^4 + (p_2 + p_1^2)^2 \pm p_3^2 \pm \ldots \pm p_n^2$, $\varepsilon = \pm 1$. Le type lagrangien des singularités ne dépend pas du choix des signes des carrés, mais pour $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$ on a des applications gradientes non Lagrange-équivalentes.

Considérons un germe en 0 d'application lagrangienne définie par la fonction $S(q_I, p_J)$ d'après les formules usuelles:

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_J, \quad (p, q) \mapsto q.$$

Considérons encore les germes en 0 des fonctions

$$F(x, \lambda) = S(\lambda_I, x) + \langle \lambda_J, x\rangle,$$
$$\Phi(x, \lambda, a) = F(x + a, \lambda),$$
$$f(x) = F(x, 0).$$

Supposons que f admette un zéro d'ordre non inférieur à deux en 0.

Corollaire 4. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le germe considéré est Lagrange-stable.*
2. *Le déploiement F de f est R^+-versel.*
3. *L'application qui associe au couple (a, λ) un germe de $\Phi(\cdot, \lambda, a)$ en 0 est transversale à la R^+-orbite du germe de f en 0.*

21.2. Description des caustiques.

Théorème. *La caustique d'une application lagrangienne définie par une famille génératrice F, déploiement d'une fonction f, est une composante de l'ensemble de bifurcation de fonctions formée par les valeurs du paramètre auxquelles correspondent, dans la famille, des fonctions à points critiques dégénérés (i.e. qui ne sont pas de Morse).*

L'application lagrangienne est elle-même RL-équivalente à la projection de l'ensemble critique (ensemble de tous les points critiques de toutes les fonctions de la famille) sur l'espace de paramètres.

Vu les définitions, la démonstration est immédiate.

Soit maintenant $f \in \mathfrak{m}^2$ une fonction à point critique 0 de multiplicité finie admettant à l'origine un zéro d'ordre non inférieur à 2. Regardons une transversale T dans $\mathfrak{m}^2$ à la R-orbite du germe de f en 0 comme un déploiement du germe de f. Ce déploiement est induit, comme tout autre, du déploiement versel par une application de la transversale dans la base du déploiement R-miniversel $\varphi: T \to B$. La dimension de B est égale à la multiplicité μ du point singulier de f en 0, et la dimension de T est $\mu - 1$.

Supposons choisi un déploiement R-versel de la forme

$$\tilde{F}(x, \lambda) = F(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-1}) + \lambda_\mu,$$

si bien que F est un déploiement R^+-miniversel. La projection $\lambda \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-1})$ définit une application $\pi: B \to \Lambda$, où Λ est base de déploiement R^+-miniversel.

Théorème. *Un germe stable d'application lagrangienne est équivalent à gauche et à droite au germe d'application $\pi \circ \varphi: T \to \Lambda$ pour une fonction f convenable.*

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer la construction précédente au cas où F est famille génératrice du germe en question.

Corollaire 1. *La caustique d'un germe stable d'application lagrangienne holomorphe est la variété de ramification véritable d'un revêtement ramifié de l'ensemble de bifurcation des zéros au-dessus de la base du déploiement R^+-miniversel.*

En effet, l'ensemble de bifurcation des zéros dans la base du déploiement R-miniversel est précisément $\varphi(T)$.

Corollaire 2. *La caustique d'un germe holomorphe stable d'application lagrangienne est un germe d'hypersurface complexe irréductible*

(singulière en général) qui est biholomorphiquement équivalente à une surface algébrique.

L'algébricité découle du fait que le déploiement versel est équivalent à un déploiement polynomial; l'irréductibilité est consécutive à celle de la variété de formes quadratiques dégénérées.

21.3. Classification des singularités lagrangiennes en petite dimension. Les théorèmes démontrés ci-dessus et la classification établie au chapitre II donnent immédiatement lieu au

Corollaire 1. *Les germes d'applications lagrangiennes génériques pour une variété de dimension $n < 6$ en chaque point sont stables et appartiennent à un nombre fini de classes d'équivalence lagrangienne.*

Ces classes correspondent aux singularités simples A_μ, $\mu \geqslant 1$, D_μ, $\mu \geqslant 4$, E_μ (chap. II) pour lesquelles $\mu - 1 \leqslant n$: une famille génératrice de germe lagrangien est déploiement R^+-versel d'une fonction de type correspondant.

Par exemple, pour $n = 1$ l'unique singularité est le pli (A_2); pour $n = 2$ on a en outre des fronces (A_3), auxquelles viennent s'ajouter pour $n = 3$ les singularités A_4 et D_4, puis pour $n = 4$ les singularités A_5 et D_5 et enfin pour $n = 5$ les singularités A_6, D_6, E_6.

Remarque. Les germes d'applications lagrangiennes de variétés de dimension $n \geqslant 6$ pour un ensemble ouvert d'applications génériques sont en certains points instables et admettent des modules. Cela découle du fait que la classe des singularités P_8 (voir chap. II) est de codimension $c = 6$.

Corollaire 2. *Les germes d'applications lagrangiennes génériques pour des variétés de dimension $n < 6$ en chaque point sont équivalents aux germes de projections $(p, q) \mapsto q$ de variétés lagrangiennes $p_I = \partial S/\partial q_I$, $q_J = -\partial S/\partial p_J$, où:*

pour $n \geqslant 1$ *on a* A_2: $S = p_1^3$;

pour $n \geqslant 2$ *on a de plus* A_3: $S = \pm p_1^4 + q_2 p_1^2$;

pour $n \geqslant 3$ *on a de plus* A_4: $S = p_1^5 + q_2 p_1^3 + q_3 p_1^2$

et D_4: $S = p_1^3 \pm p_1 p_2^2 + q_3 p_1^2$;

pour $n \geqslant 4$ *on a de plus* A_5: $S = \pm p_1^6 + q_2 p_1^4 + q_3 p_1^3 + q_4 p_1^2$

et D_5: $S = p_1 p_2^2 \pm p_1^4 + q_3 p_1^3 + q_4 p_1^2$;

pour $n \geqslant 5$ *on a de plus* A_6: $S = p_1^7 + q_2 p_1^5 + q_3 p_1^4 + q_4 p_1^3 + q_5 p_1^2$,

D_6: $S = p_1 p_2^2 \pm p_1^5 + q_3 p_1^4 + q_4 p_1^3 + q_5 p_1^2$

et E_6: $S = p_1^3 \pm p_2^4 + q_3 p_1^2 p_2 + q_4 p_1 p_2 + q_5 p_1^2$.

Corollaire 3. *Les caustiques génériques dans le plan n'ont d'autres singularités que des points de rebroussement correspondant aux singularités lagrangiennes A_3. Dans l'espace tridimensionnel les caustiques génériques n'ont d'autres singularités que des arêtes de rebroussement*

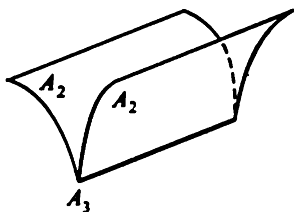


Fig. 55

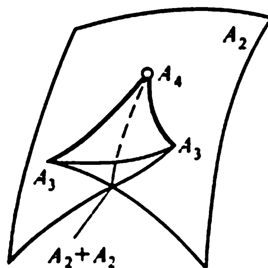


Fig. 56

(A_3) (fig. 55), *des queues d'aronde* (A_4) (fig. 56) *et des singularités ponctuelles de deux types correspondant aux deux formes réelles de D_4: la pyramide* (*ou cheveu*) *et le porte-monnaie* (*ou vague*) (fig. 57).

En plus de ces singularités, il peut y avoir naturellement des intersections transversales des différentes branches de caustiques.

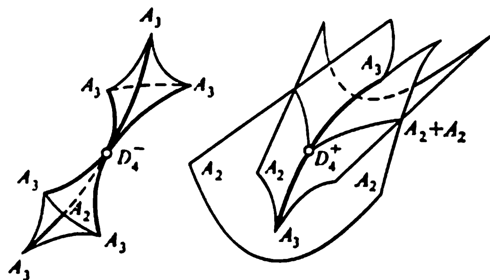


Fig. 57

A l'heure actuelle le problème de classification des singularités lagrangiennes génériques est résolu jusqu'en dimension 10. A partir de la dimension 6, les modules apparaissent en nombre infini: les formes normales contiennent des fonctions arbitraires qui sont des invariants (modules fonctionnels). Au n° 21.7 nous donnerons une classification des formes normales des singularités lagrangiennes génériques d'applications d'espaces de dimension $\leqslant 10$.

On peut définir les caustiques pour tous les groupes engendrés par les réflexions, par exemple pour les groupes qui correspondent aux singularités de bord B_k, C_k, F_4. Ces caustiques (plus exactement, leurs parties) sont singularités du comportement asymptotique des

intégrales du type

$$I_h(\lambda) = \int e^{iF(x,\lambda)/h} \frac{1}{\sqrt{x_1}} \varphi(x, \lambda)\, dx_1 \ldots dx_n, \quad h \to 0,$$

pour des fonctions de phases F qui dépendent génériquement d'un nombre non excessif de paramètres.

Les caustiques de C_4 et de F_4 sont représentées sur les figures 58 et 59 respectivement ; par des lettres primées sont désignées les strates de dégénérescence de la restriction au bord.

On voit sur la figure 60 les courbes des singularités du comportement asymptotique dans le cas de deux paramètres, et sur les figures 61 et 62, dans le cas de trois paramètres.

21.4. Stabilité legendrienne. Quitte à remplacer « lagrangien » par « legendrien », la définition de la stabilité legendrienne des applications et germes legendriens reprend mot pour mot la définition correspondante dans le cas lagrangien.

Théorème. *Un germe d'application legendrienne définie par une famille d'hypersurfaces génératrice $F(x, \lambda) = 0$ à un paramètre λ est Legendre-stable si et seulement si le déploiement F d'une fonction f (où $f(x) \equiv F(x, 0)$) est V-versel.*

On suppose que $F = 0$ soit une équation non singulière d'hypersurface ; pour la notion de V-versalité, voir chapitre premier, § 8.

Corollaire 1. *Un germe en 0 d'application legendrienne définie par une famille d'hypersurfaces génératrice $F(x, \lambda) = 0$ à paramètre λ, $x \in \mathbf{R}^h$, $\lambda \in \mathbf{R}^l$, est Legendre-stable si et seulement si les classes des germes de fonctions $\{g_1, \ldots, g_l \ (g_i(x) = \partial F/\partial x_i \mid \lambda = 0)\}$ engendrent l'espace vectoriel*

$$Q_f = \mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_k]]/(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_k, f),$$

où $f(x) \equiv F(x, 0)$.

Corollaire 2. *Tout germe stable d'application legendrienne s'écrit en coordonnées convenables à l'aide d'une fonction génératrice de la forme*

$$S(q_I, p_J) = f(p_J) + \langle q_I, g_I(p_J)\rangle,$$

où les $\{p_j, j \in J\}$ et les $\{g_i, i \in I\}$ engendrent Q_f sur $\mathbf{R}$, le cardinal de l'ensemble des arguments pathologiques J étant égal à la dimension du noyau de la dérivée de l'application en 0.

Ici la variété legendrienne se définit par les équations

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_J, \quad z = S(q_I, p_J) + \langle p_J, q_J\rangle,$$

et la fibration legendrienne, par $(p, q, z) \mapsto (q, z)$.

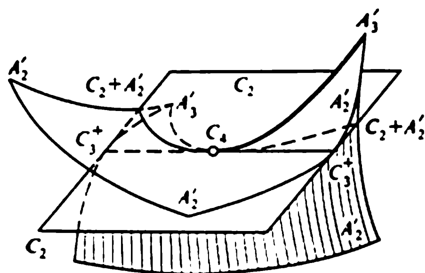


Fig. 58

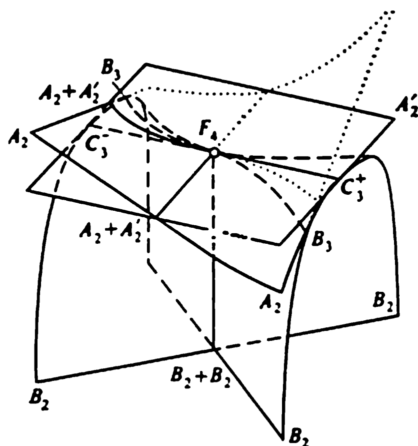


Fig. 59

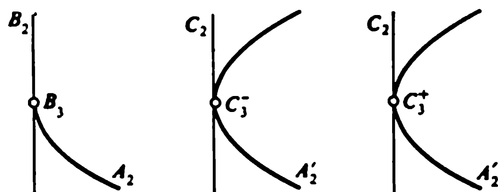


Fig. 60

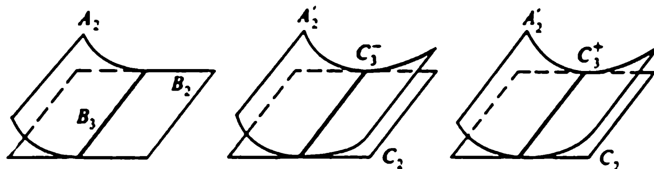


Fig. 61

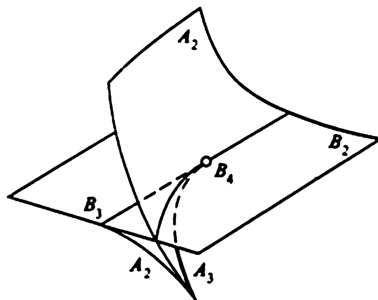


Fig. 62

Exemple. Soient $f = p_1^3$, $J = \{1\}$, $I = \{2, \ldots, n\}$. Alors $l = n + 1 \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, $S = p_1^3$. L'application est définie par $(p_1, q_2, \ldots, q_n) \mapsto (-3p_1^2, q_2, \ldots, q_n, z = -2p_1^3)$. Pour une variété legendrienne de dimension un ($n = 1$) le front est une courbe plane avec un point de rebroussement. Ainsi, à la différence des courbes génériques planes, les fronts des applications génériques legendriennes peuvent présenter des singularités non supprimables par une petite déformation dans la classe des fronts, à savoir: des points de rebroussement (encore une manifestation du principe général selon lequel les singularités attirent des singularités). Les courbes fronts de germes legendriens génériques ne peuvent avoir aucune autre singularité.

Corollaire 3. *Les fronts de germes stables d'applications legendriennes sont difféomorphes aux graphes des transformées de Legendre généralisées des fonctions différentiables de la forme*

$$S(p) = f(p) + \sum (p_i + g_i(p_J))^2, \quad i \in I,$$

où les $\{g_i\}$ *sont les germes qui, avec* 1 *et* $\{p_j, j \in J\}$, *engendrent l'espace vectoriel de l'algèbre* $\mathbf{R}[[p_J]]/(\partial f/\partial p_j, f)$, $j \in J$, *le cardinal de* J *pouvant être pris égal au corang (dimension du noyau de la dérivée de l'application legendrienne en* 0).

Exemple 1. $J = \{1\}$, $I = \varnothing$, $f(p_1) = p_1^3$, $S = f$. Le graphe de la transformée de Legendre est une parabole semi-cubique.

Exemple 2. $J = \{1\}$, $I = \{2\}$, $f(p_1) = p_1^4$, $S = p_1^4 + (p_2 + p_1^2)^2$. Le graphe de la transformée de Legendre a un point singulier « queue d'aronde » (on le verra sans peine).

Considérons le germe en 0 d'une application legendrienne définie par une fonction génératrice $S(q_I, p_J)$ d'après les formules usuelles:

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_J, \quad z = S + \langle p_J, q_J \rangle,$$
$$(p, q, z) \mapsto (q, z).$$

Considérons de plus les germes en 0 des fonctions

$$F(x, \lambda, z) = S(\lambda_I, x) + \langle \lambda_J, x \rangle + z,$$
$$\Phi(x, \lambda, z, a) = F(x + a, \lambda, z),$$
$$f(x) = F(x, 0, 0).$$

Supposons que f admet en 0 un zéro d'ordre non inférieur à 2.

Corollaire 4. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:
1. *Le germe considéré est Legendre-stable.*
2. *Le déploiement* F *de la fonction* f *est* V*-versel.*

3. *L'application qui au triplet* (a, λ, z) *associe le germe en* 0 *de* $\Phi(\cdot, \lambda, z, a)$ *est transversale à la V-orbite du germe de* f *en* 0.

Le théorème et les corollaires 1 à 4 se démontrent de la même façon que dans le cas lagrangien.

21.5. Description des fronts.

Théorème. *Le front d'une application legendrienne définie par une famille d'hypersurfaces génératrice* $F(x, \lambda) = 0$, *où* F *est déploiement d'une fonction* f, *est l'ensemble de bifurcation de la famille, i.e. se compose des* λ *pour lesquels l'hypersurface de la famille* $\{x: F(x, \lambda) = 0\}$ *est singulière.*

Corollaire. *Le front d'un germe holomorphe stable d'application legendrienne est germe d'une hypersurface complexe (singulière en général) qui est biholomorphiquement équivalente à une surface algébrique.*

Dans le cas où la fonction F définissant la famille d'hypersurfaces génératrice $F = 0$ est déploiement V-versel d'un germe f *quasi homogène* de multiplicité finie μ, on peut faire mieux et montrer que le front complexe est irréductible, admet une normalisation non singulière et est espace d'un revêtement ramifié à μ feuillets au-dessus d'un espace de dimension $\mu - 1$ (base du déploiement R^+-versel) avec ramification sur la caustique correspondante, le groupe du revêtement étant tout le groupe des permutations des μ feuillets.

Tous ces résultats découlent des propriétés des variétés de bifurcation dans la base d'un déploiement R-versel démontrées dans [105]. En effet, pour un germe quasi homogène, f appartient à l'idéal construit sur les $(\partial f/\partial x_i)$, aussi le déploiement V-versel est-il R-versel.

21.6. Classification des singularités legendriennes en petite dimension. Les résultats obtenus ci-dessus donnent lieu à un

Corollaire. *Les germes d'applications legendriennes génériques pour des variétés legendriennes de dimension* $n < 6$ *sont en chaque point stables et appartiennent à un nombre fini de classes d'équivalence legendrienne.*

Ces classes correspondent aux singularités simples A_μ, $\mu \geqslant 1$, D_μ, $\mu \geqslant 4$, E_μ, pour lesquelles $\mu - 1 \leqslant n$; la famille génératrice est une hypersurface de niveau nul du déploiement R-versel d'une fonction du type correspondant.

Les germes d'applications legendriennes de variétés de dimension $n \geqslant 6$, pour un ensemble ouvert d'applications, sont instables en certains points et admettent des modules.

Les germes d'applications legendriennes génériques pour des variétés de dimension $n < 6$ en chaque point sont équivalents aux

germes de projections $(p, q, z) \mapsto (q, z)$ de variétés legendriennes

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_J, \quad z = S(q_I, p_J) + \langle p_J, q_J \rangle,$$

où les fonctions S sont données dans le tableau du corollaire 2 du n° 21.3.

De ces formules il ressort par exemple que les fronts génériques dans l'espace tridimensionnel n'ont d'autres singularités que des arêtes de rebroussement (A_2) et des singularités « queue d'aronde » (A_3), sans compter les intersections transversales.

Une classification des germes d'applications legendriennes génériques de variétés de dimension non supérieure à 10 sera donnée un peu plus loin (n° 21.8).

21.7. Classification des singularités lagrangiennes. Soit $f: (\mathbf{C}^k, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction différentiable en un point critique de multiplicité finie μ. A ce germe seront associées plusieurs singularités lagrangiennes. Désignons par Φ la classe de f (voir les notations du chap. II) et par l la dimension de la variété lagrangienne.

1° Singularité lagrangienne Φ. Considérons un déploiement R^+-miniversel

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{\mu-1} e_{\mu-1}$$

(les monômes $e_1, \ldots, e_{\mu-1}$ engendrent une $\mathbf{C}$-base de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}Q_f = \mathfrak{m}/(\partial f/\partial x)$, où $\mathfrak{m}$ est l'espace des fonctions qui s'annulent à l'origine).

On peut considérer le déploiement F comme l-paramétrique pour tout $l \geqslant \mu - 1$ avec le paramètre λ. Le germe de ce déploiement en 0 est famille génératrice d'un germe d'application lagrangienne en $\mathbf{C}^l$.

Définition. On appelle *singularité lagrangienne de type* Φ dans $\mathbf{C}^l$, $l \geqslant \mu - 1$, une singularité définie par la famille génératrice F.

Exemple. $F(x, \lambda_1, \lambda_2) = x^3 + \lambda_1 x$ définit une singularité de dimension deux de type A_2 (un pli sur le plan).

2° Singularité lagrangienne $\Phi^\bullet$. Supposons que f soit une des singularités unimodales (voir chap. II). Choisissons alors les monômes e_i de telle façon que le germe de strate $\mu = \mathrm{Cte}$ dans la base du déploiement R^+-miniversel F soit germe de l'axe $\lambda_{\mu-1}$ en 0.

A cet effet, il suffit, dans le cas (semi-)quasi homogène, de prendre comme $e_{\mu-1}$ le monôme J de (quasi-)degré maximal, et pour $T_{p,q,r} = axyz + x^p + y^q + z^r$, de choisir $J = xyz$. [Le monôme J engendre dans Q_f l'annulateur de l'idéal maximal ; sa classe dans Q_f est proportionnelle à celle du hessien det $(\partial^2 f/\partial x^2)$.]

Définition. On appelle *singularité lagrangienne* $\Phi^\bullet$ dans $\mathbf{C}^l$ ($l \geqslant \mu - 2$) une singularité définie par le germe en 0 de famille gé-

nératrice à $l = \mu - 2 + m$ paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-2}, \tau_1, \ldots, \tau_m$ $(m \geqslant 0)$ d'après la formule

$$F(x; \lambda, \tau) = f(x) + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{\mu-2} e_{\mu-2} + \omega J,$$

où $\omega = u(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-2}) \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2$ et u est un germe de fonction différentiable nulle à l'origine. La singularité $\Phi^{\cdot}$ des applications dans un espace de dimension donnée $\mu - 2 + m$ sera notée Φ^m (si bien que *le point de* $\Phi^{\cdot}$ *n'est autre que le nombre des carrés de la forme normale*).

Exemple. Soit $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ax_1x_2x_3$ une singularité parabolique de classe ${}_aP_8$. La singularité lagrangienne ${}_aP_8^0$ d'une application de variétés de dimension six est définie par la famille génératrice

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 +$$
$$+ \lambda_4 x_1 x_2 + \lambda_5 x_1 x_3 + \lambda_6 x_2 x_3 + u(\lambda) x_1 x_2 x_3.$$

Le type lagrangien de cette singularité dépend comme d'un paramètre de la fonction u de six variables qui est un « module fonctionnel ».

Tous les germes lagrangiens de type P_8^0 (avec tous les a, u possibles) forment un ensemble de codimension six dans l'espace des germes d'applications lagrangiennes.

3° Singularité lagrangienne O_{16}^0.

Définition. La singularité O_{16}^0 d'une application dans $\mathbf{C}^{10}$ est définie par une famille génératrice avec un paramètre λ de dimension dix d'après la formule

$$F(x, \lambda) = f + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{10} e_{10} + u_1 J_1 + \ldots + u_5 J_5,$$

où f est une fonction semi-homogène de quatre variables de corang 4 avec la partie principale cubique non dégénérée en 0 ; les dix monômes e_i de degrés 1 et 2 et les cinq monômes J_i de degrés 3 et 4 engendrent une base de $\mathfrak{m}Q_f$.

Dans cette formule $u_1, \ldots, u_5$ sont des germes de fonctions différentiables de λ s'annulant à l'origine. Ainsi donc, la singularité lagrangienne O_{16}^0 d'une application dans $\mathbf{C}^{10}$ a comme modules cinq fonctions de dix variables.

Théorème. *Pour $l \leqslant 10$ un germe d'application lagrangienne générique dans un espace de dimension l est en chaque point Lagrange-équivalent à un des germes de la liste* $\{\Phi, \Psi^{\cdot}, O_{16}^0\}$, *où Φ est une singularité simple ou unimodale de $\mu \leqslant l + 1$; Ψ une singularité unimodale de $\mu \leqslant l + 2$.*

Dans le tableau suivant sont indiquées, pour $6 \leqslant l \leqslant 10$, les singularités qui apparaissent pour la première fois dans la dimension l donnée (notons qu'à mesure que l croît, Φ est conservée et le

m de Ψ^m augmente). Nous utilisons les notations $T_{2,3,r} = J_{r+4}$, $T_{2,4,r} = X_{r+5}$, $T_{3,3,r} = P_{r+5}$, $T_{2,p,q} = Y_{p,q}$, $T_{3,p,q} = R_{p,q}$.

6	7	8	9	10
A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}
E_7	E_8	$J_{10}^{\bullet}$	J_{10}, $J_{11}^{\bullet}$	J_{11}, $J_{12}^{\bullet}$, $E_{12}^{\bullet}$
	$X_9^{\bullet}$	X_9, $X_{10}^{\bullet}$	X_{10}, $X_{11}^{\bullet}$, $Y_{5,5}^{\bullet}$	X_{11}, $X_{12}^{\bullet}$, $Y_{5,5}$, $Y_{5,6}^{\bullet}$
			$Z_{11}^{\bullet}$	Z_{11}, $Z_{12}^{\bullet}$, $U_{12}^{\bullet}$, $W_{12}^{\bullet}$
$P_8^{\bullet}$	P_8, $P_9^{\bullet}$	P_9, $P_{10}^{\bullet}$, $Q_{10}^{\bullet}$	P_{10}, $P_{11}^{\bullet}$, Q_{10}, $Q_{11}^{\bullet}$	P_{11}, $P_{12}^{\bullet}$, Q_{11}, $Q_{12}^{\bullet}$
		$R_{4,4}^{\bullet}$	$R_{4,4}$, $R_{4,5}^{\bullet}$	$R_{4,5}$, $R_{4,6}^{\bullet}$, $R_{5,5}^{\bullet}$, O_{16}^{0}
			$S_{11}^{\bullet}$, $T_{4,4,4}^{\bullet}$	S_{11}, $S_{12}^{\bullet}$, $T_{4,4,4}$, $T_{4,4,5}^{\bullet}$

Ainsi donc, pour $l \geqslant 6$ les germes d'applications lagrangiennes génériques dans $\mathbf{C}^l$ sont en certains points Lagrange-instables et admettent des modules fonctionnels qui sont des fonctions de l variables.

Tous les germes lagrangiens simples stables se réduisent aux types A_μ, D_μ, E_6, E_7, E_8.

Démonstration. Nous utiliserons la réduction à la R^+-classification des familles génératrices et la stratification de l'espace des germes de fonctions décrite dans le chap. II.

Supposons qu'un germe d'application lagrangienne soit défini par une famille génératrice F qui est déploiement d'une fonction f. Ce déploiement est R^+-équivalent à un déploiement induit du déploiement R^+-miniversel, i.e. à un déploiement de la forme

$$F(x, \varepsilon) = f(x) + \varphi_1(\varepsilon) e_1(x) + \ldots + \varphi_{\mu-1}(\varepsilon) e_{\mu-1}(x), \quad \varepsilon \in \mathbf{C}^l.$$

D'après le théorème de transversalité, pour les applications lagrangiennes génériques l'application φ est transversale à la stratification de la base en strates $\mu = \mathrm{Cte}$. Donc F est un déploiement versel pour f simples: dans ce cas la singularité est Lagrange-équivalente à une singularité de type simple Φ_μ, et ceci pour $l \geqslant \mu - 1$.

Si f est unimodale, l'application φ est transversale à l'axe $\lambda_{\mu-1}$ dans la base du déploiement R^+-miniversel. Dans ce cas on peut prendre $\varphi_1(\varepsilon), \ldots, \varphi_{\mu-2}(\varepsilon)$ comme une partie des coordonnées dans l'espace des paramètres; en notant ces coordonnées $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-2}$, nous obtenons une famille R^+-équivalente à la famille initiale:

$$F(x, \varepsilon) = f(x) + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{\mu-2} e_{\mu-2} + \omega(\varepsilon) J, \quad l \geqslant \mu - 2.$$

Les équations $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{\mu-2} = 0$ définissent une sous-variété de codimension $\mu - 2$ dans la base de $\mathbf{C}^l$. La restriction de la fonc-

tion ω à cette sous-variété pour des applications lagrangiennes génériques est une fonction de Morse.

Si $\varepsilon = 0$ est un point non critique de cette fonction, on peut prendre ω comme coordonnée $\lambda_{\mu-1}$; la singularité lagrangienne est équivalente à une singularité unimodale Φ_μ, $l \geqslant \mu - 1$. Si par contre c'est un point critique, on peut, d'après le lemme de Morse paramétrique, réduire ω à

$$u(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-2}) \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2, \quad m = l - \mu + 2,$$

i.e. la singularité lagrangienne est équivalente à Φ_μ^m. Le cas de f de classe O_{1n}^0 est traité d'une façon analogue. D'après le théorème de transversalité, on ne rencontre aucune autre singularité pour $l \leqslant 10$.

On vérifie que la fonction u est un module. Cela ressort des considérations suivantes (voir une autre démonstration dans [339]):

1) le graphe de u est l'ensemble des valeurs critiques de l'application inductrice φ $((\lambda, \tau) \mapsto (\lambda, \omega(\lambda, \tau)))$;

2) l'image du point ε par l'application inductrice φ est définie d'une façon presque unique par la classe de R^+-équivalence du terme $F(\cdot, \varepsilon)$ de la famille F.

Cette dernière circonstance découle du fait qu'une famille de μ valeurs critiques complexes, considérées à une constante additive commune près, définit en général un point de la base de dimension $\mu - 1$ d'un déploiement R^+-miniversel à un nombre fini de variantes près.

21.8. Classification des singularités legendriennes. On définit les singularités legendriennes des classes Φ et $\Phi^\cdot$ de la façon suivante. Soit μ la multiplicité du point critique 0 d'une fonction f (comme précédemment).

1°. Singularité legendrienne Φ. La famille d'hypersurfaces génératrice de cette singularité à front de dimension l est graphe d'une famille de fonctions génératrice de la singularité lagrangienne Φ des applications dans $\mathbf{C}^l$ $(l \geqslant \mu - 1)$.

Exemple. La singularité legendrienne A_2 à front de dimension 2 est définie par une famille de surfaces génératrice à trois paramètres :

$$0 = F(x; \lambda_1, \lambda_2, z) \equiv x^3 + \lambda_1 x - z$$

à paramètres λ_1, λ_2, z (le front est une surface avec une arête de rebroussement).

2° Singularité legendrienne $\Phi^\cdot$ (Φ unimodale). La famille d'hypersurfaces génératrice de cette singularité à front de dimension l est graphe d'une famille de fonctions génératrice de la singularité lagrangienne $\Phi^\cdot$ des applications dans $\mathbf{C}^l$ $(l \geqslant \mu - 2)$ pour laquelle la fonction u de 2° du n° 21.7 est identiquement nulle.

Exemple. La singularité legendrienne ${}_0P_8^0$ à front de dimension six est définie par la famille d'hypersurfaces génératrice à sept paramètres :

$$0 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \\ + \lambda_4 x_1 x_2 + \lambda_5 x_1 x_3 + \lambda_6 x_2 x_3 - z.$$

3° **Singularité legendrienne Φ^0** à front de dimension $l > \mu - 2$. Elle se déduit de la singularité Φ^0 à front de dimension $\mu - 2$ définie plus haut par multiplication directe par $C^{l-\mu+2}$. La famille d'hypersurfaces génératrice est définie par

$$0 = f(x) + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{\mu-2} e_{\mu-2} - z$$

(où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l, z)$ est un paramètre de dimension $l + 1$).

Théorème. *Pour $l \leqslant 10$ un germe d'application legendrienne générique dans un espace de dimension $l + 1$ est en chaque point Legendre-équivalent à un des germes de la liste $\{\Phi, \Psi^0, \Omega^0, O_{16}^0\}$, où Φ est une singularité simple ou parabolique de $\mu \leqslant l + 1$ ou une singularité quasi homogène exceptionnelle de $\mu \leqslant l$; Ψ une singularité parabolique de $\mu \leqslant l + 2$; Ω une singularité hyperbolique de $\mu \leqslant l + 2$, ou une singularité exceptionnelle quasi homogène de $\mu \leqslant l + 1$, ou une singularité exceptionnelle non quasi homogène de $\mu \leqslant l + 2$; O_{16}^0 ne se rencontre que pour $l = 10$.*

Dans le tableau suivant sont indiquées pour $6 \leqslant l \leqslant 10$ les singularités qui apparaissent pour la première fois sur les fronts de dimension l. L'indice placé à gauche de la lettre désigne la valeur a du module pour les singularités hyperboliques et exceptionnelles ($a = 0$ pour une singularité quasi homogène et $a = 1$ pour une singularité non quasi homogène).

6	7	8	9	10
A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}
E_7	E_8	J_{10}^0	$J_{10}, {}_1J_{11}^0$	${}_1J_{12}^0, {}_1E_{12}^0$
	X_9^0	$X_9, {}_1X_{10}^0$	${}_1X_{11}^0, {}_1Y_{5,5}^0$	${}_1X_{12}^0, {}_1Y_{5,6}^0$
			${}_1Z_{11}^0$	${}_0Z_{11}^0, {}_1Z_{12}^0, {}_1U_{12}^0, {}_1W_{12}^0$
P_8^0	$P_8, {}_1P_9^0$	${}_1P_{10}^0, {}_1Q_{10}^0$	${}_1P_{11}^0, {}_0Q_{10}^0, {}_1Q_{11}^0$	${}_1P_{12}^0, {}_0Q_{10}, {}_0Q_{11}^0, {}_1Q_{12}^0$
		${}_1R_{4,4}^0$	${}_1R_{4,5}^0$	${}_1R_{4,6}^0, {}_1R_{5,5}^0, O_{16}^0$
			${}_1S_{11}^0, {}_1T_{4,4,4}^0$	${}_0S_{11}^0, {}_1S_{12}^0, {}_1T_{4,4,5}^0$

Ainsi donc, pour $l \geqslant 6$ les germes d'applications legendriennes génériques aux fronts de dimension l sont en certains points Legen-

dre-instables et admettent des modules. Le nombre des modules reste fini pour $l \leqslant 9$ (à la différence du cas lagrangien où les modules fonctionnels apparaissent déjà à partir de $l = 6$). Pour $l \geqslant 10$ les germes d'applications legendriennes génériques dans $\mathbf{C}^{l+1}$ admettent des modules fonctionnels.

Tous les germes legendriens simples stables se réduisent aux types A_μ, D_μ, E_6, E_7, E_8.

Démonstration. Grâce aux résultats de l'étude du cas lagrangien, nous pouvons prendre d'emblée comme familles d'hypersurfaces génératrices pour les germes de singularités legendriennes génériques aux fronts de dimension l, des graphes de familles génératrices de germes de singularités lagrangiennes génériques des applications dans $\mathbf{C}^l$.

Or, les germes legendriens obtenus avec des modules lagrangiens différents sont dans bien des cas Legendre-équivalents. Il convient donc de préciser lesquels des graphes de familles génératrices lagrangiennes sont équivalents comme familles d'hypersurfaces.

Commençons par classifier les hypersurfaces $f = 0$. En passant à une nouvelle relation d'équivalence (V- au lieu de R^+-), la réserve des singularités simples et paraboliques reste inchangée. Toutes les singularités hyperboliques sont V-équivalentes aux singularités de module $a = 1$ ($x^p + y^q + z^r + axyz \sim x^p + y^q + z^r + xyz$ si $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} < 1$). Les singularités unimodales exceptionnelles se répartissent en quasi homogènes ($a = 0$) et non quasi homogènes, ces dernières étant V-équivalentes aux singularités de $a = 1$ (par exemple, pour E_{12} on a $x^3 + y^7 + axy^5 \sim x^3 + y^7 + xy^5$ si $a \neq 0$).

Nous obtenons ainsi une V-stratification de l'espace des germes de fonctions dans un point critique en « strates » suivantes:

Type de singularité f	Codimension
Simples et paraboliques Φ_μ	$\mu - 1$
Hyperboliques et exceptionnelles non quasi homogènes ${}_1\Phi_\mu$	$\mu - 1$
Exceptionnelles quasi homogènes ${}_0\Phi_\mu$	μ
O_{16}	10
Autres	11

La démonstration se poursuit par analogie au cas lagrangien, à ceci près que dans le cas legendrien la fonction u n'est pas du tout un module. Montrons qu'*on peut annuler u par une V-équivalence.*

Considérons un déploiement R-miniversel d'un germe f de la forme

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_\mu e_\mu.$$

Les équations $F = 0$ et $EF = 0$, où $E(0, 0) \neq 0$, définissent une même famille d'hypersurfaces et une même singularité legendrienne. Les familles de fonctions F et EF ne sont pas R-équivalentes en général, mais EF est R-équivalente à une famille induite de F. L'application inductrice de la base de la famille dans elle-même définit une équivalence legendrienne qui conserve la singularité legendrienne considérée. A chaque fonction E correspond donc un difféomorphisme de la base relevé à une variété legendrienne. L'ensemble de tels difféomorphismes de la base a une structure de groupe; nous le noterons G.

Soient $\varphi_i: B_i \to \mathbf{C}^\mu$, $i = 1, 2$, deux applications dans la base de notre déploiement qui induisent des familles $F_i(x, \varepsilon) \equiv F(x, \varphi_i(\varepsilon))$. Si les applications φ_1, φ_2 se laissent transformer l'une dans l'autre par un élément de G et le difféomorphisme $B_1 \to B_2$, les familles d'hypersurfaces $F_i = 0$ sont équivalentes.

Supposons à présent que f soit une singularité unimodale quasi homogène et que la base soit composée de monômes

$$e_1, \ldots, e_{\mu-2}, e_{\mu-1} = J, \quad e_\mu = 1.$$

Lemme. *Toute hypersurface transversale à l'axe $\lambda_{\mu-1}$ se laisse transformer, au voisinage du point 0, en germe d'hyperplan $\lambda_{\mu-1} = 0$ par un difféomorphisme de G.*

Pour démontrer ce lemme, faisons quelques calculs. A la multiplication de F par $E = 1 + tg$ correspond une famille de difféomorphismes de G dépendant du temps t. Pour $t = 0$ le champ de vitesses correspondant sur la base se calcule comme suit: $\Lambda = \sum \Lambda_i(\lambda)\, \partial/\partial\lambda_i$, où Λ_i sont les composantes de la décomposition

$$-g(x, \lambda) F(x, \lambda) \equiv \sum h_i(x, \lambda)\, \partial F/\partial x_i + \sum \Lambda_j(\lambda)\, e_j(x)$$

qu'on obtient en dérivant par rapport à t la relation

$$(1 + tg) F(H_t(x, \lambda), \varphi_t(\lambda)) \equiv F(x, \lambda).$$

Considérons les champs $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^\mu$ qu'on peut obtenir par cette construction pour $g = e_1, \ldots, e_\mu$. On constate sans peine que pour les singularités unimodales non paraboliques les μ fonctions $\Lambda^i_{\mu-1} = \Lambda^i\lambda_{\mu-1}$, $i = 1, \ldots, \mu$, sont indépendantes en 0; pour les singularités paraboliques les μ fonctions $\Lambda^i_{\mu-1}$ $(i \neq \mu)$, $\lambda_{\mu-1}$ sont indépendantes. (Ici $e_{\mu-1} = J$, $e_\mu = 1$.)

[En effet, prenons une singularité quasi homogène aux poids $\deg x_i = \alpha_i$, $\deg f = 1$ et désignons par v le champ eulérien $v = \sum \alpha_i x_i\, \partial/\partial x_i$. Alors $f = vf$, si bien que pour $F = f + \sum \lambda_j e_j$ on a $F = vF + \sum (1 - \deg e_j)\lambda_j e_j$. D'où

$$Fe_i = (e_i v) F + \sum (1 - \deg e_j)\lambda_j e_i e_j.$$

Supposons que dans l'algèbre locale $[e_i][e_j]=\sum c^k_{i,j}[e_k]$. Alors

$$e_ie_j=\sum c^k_{i,j}e_k+\sum h^k_{i,j}(x)\,\partial f/\partial x_k=$$
$$=\sum c^k_{i,j}e_k+\sum h^k_{i,j}\,\partial F/\partial x_k+O(|\lambda|).$$

Donc,

$$\Lambda^i_{\mu-1}=A_i(\lambda)+O(|\lambda|^2),$$

où

$$A_i(\lambda)=\sum c^{\mu-1}_{i,j}(1-\deg e_j)\,\lambda_j.$$

La forme bilinéaire définie par la matrice $c^{\mu-1}_{i,j}$ est non dégénérée (cf. n° 5.4). Dans le cas non parabolique tous les deg e_j sont distincts de 1, aussi les $\{A_i,\ i=1,\ \ldots,\ \mu\}$ sont-elles indépendantes. Dans le cas parabolique tous les deg e_j sont distincts de 1 sauf deg $e_{\mu-1}$; on a alors $\partial A_i/\partial\lambda_{\mu-1}=0$ et $A_\mu=0$. Pour cette raison les formes $(A_1,\ \ldots,\ A_{\mu-1};\ \lambda_{\mu-1})$ sont indépendantes.]

Cela permet de réduire par la méthode d'homotopie usuelle, au moyen de difféomorphismes de G, la fonction φ de $\partial\varphi/\partial\lambda_{\mu-1}(0)\neq 0$ à la forme normale $\lambda_{\mu-1}$ dans le cas non parabolique et la surface $\varphi=0$ à la forme $\lambda_{\mu-1}=0$ dans le cas parabolique (cf. n° 22.2).

Le lemme permet d'annuler la fonction u dans les formes normales lagrangiennes tout en conservant la classe de V-équivalence de la famille génératrice et de préserver ainsi la classe legendrienne de la singularité.

Remarque. Les théorèmes de classification cités sont dus à V. Zakalyukin (thèse de 1978, Université de Moscou). Son article [339] contient des résultats moins complets et en partie erronés (dans le cas legendrien).

Il est à noter qu'hormis le cas des singularités simples, nous ne postulons pas la constance de la topologie dans le cadre de la classe, si bien que notre classification est en général encore moins fine que la classification topologique. En effet, F. Pham a remarqué encore en 1970 [234] que le type topologique des diagrammes de bifurcation (fronts) peut changer le long de la strate $\mu=$ Cte. Pham a étudié la décomposition de la singularité $J_{3,0}=x^3+ax^2y^3+y^9$ en E_6 et E_8 à un même niveau ; une telle décomposition est possible pour $a=0$ et impossible pour des a proches. O. Lyashko a décrit dans [194] toutes les décompositions des singularités simples de fonctions. Une série de travaux de C. T. C. Wall parus plus tard est consacrée à la décomposition des singularités paraboliques. En étudiant la décomposition de P_8, Wall a trouvé des dizaines de courbes elliptiques qui sont exceptionnelles pour les décompositions.

§ 22. Bifurcations des caustiques et des fronts d'onde

Un front d'onde qui se propage ne reste pas générique en permanence : en certains moments il subit des métamorphoses. Leur étude conduit au problème des singularités génériques dans des familles d'applications legendriennes à un paramètre. Dans ce paragraphe nous étudierons des familles génériques de singularités lagrangiennes et legendriennes à un paramètre. Nous indiquerons les formes normales pour la dimension des fronts non supérieure à quatre (dimension des caustiques non supérieure à deux).

22.1. Grand front et fonction du temps. Considérons une famille d'applications legendriennes dépendant d'un paramètre t. Considérons le produit direct d'un espace de dimension l contenant les fronts (i.e. de la base de la fibration legendrienne) par l'axe du temps. Le produit direct en question sera appelé l'*espace-temps*, et son application naturelle sur l'axe de t, la *fonction du temps*.

La réunion des fronts correspondant à tous les t sera appelée le *grand front*. D'une façon générale, le grand front est une hypersurface dans l'espace-temps.

Proposition. *Le germe de grand front en chaque point est germe de front d'une application legendrienne dans l'espace-temps.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit le front instantané défini à l'instant t par une famille d'hypersurfaces génératrice $F_t(x, \lambda) = 0$ (le paramètre λ est un point de l'espace de dimension l contenant le front). Regardant t comme un $l + 1$-ième paramètre, nous définissons par la même formule une famille d'hypersurfaces génératrice d'une application legendrienne dans l'espace-temps. Le front de cette application n'est autre chose que le grand front.

Définition. On appelle *métamorphose d'un front* un diagramme de germes

$$\Sigma \xrightarrow{i} \mathbf{R}^{l+1} \xrightarrow{t} \mathbf{R},$$

où i est plongement d'un front de dimension l et t une fonction différentiable dont la différentielle au point étudié est distincte de zéro. On appelle *équivalence de métamorphoses* un diagramme commutatif dont les lignes horizontales sont des métamorphoses et les lignes verticales, des difféomorphismes. On dit que l'équivalence est *forte* si la dernière verticale est une translation ($t_2 = t_1 +$ Cte).

Remarque. Pour notre équivalence l'historique des passages successifs du front par tel ou tel point de l'espace peut être différent pour des métamorphoses équivalentes, mais le front de la première métamorphose est à tout instant difféomorphe au front de la seconde à un certain instant (en général différent du premier).

Considérons à présent une famille générique à un paramètre de

fronts. Le grand front ne peut présenter que des singularités standards (au moins pour des espaces de petite dimension elles sont énumérées). La classification des métamorphoses dans les familles de fronts génériques se réduit donc à celle des germes de fonctions sur l'espace-temps en un point non critique par rapport au groupe des difféomorphismes préservant le grand front.

Pour les espaces de petite dimension, les singularités du grand front sont liées aux singularités simples A_μ, D_μ, E_μ. Plus exactement, un germe de grand front est difféomorphe au produit direct de la variété de bifurcation des zéros d'une fonction de type correspondant dans la base $\mathbf{R}^\mu$ du déploiement R-miniversel, par l'espace $\mathbf{R}^m$ (l'espace-temps est $\mathbf{R}^\mu \times \mathbf{R}^m$).

Par exemple, pour A_2 dans l'espace-temps tridimensionnel le grand front est difféomorphe à un cylindre au-dessus d'une parabole semi-cubique (car l'ensemble de bifurcation des zéros de la fonction x^3 est une parabole semi-cubique).

Cela nous conduit donc à classifier les germes non singuliers de fonctions différentiables en 0 de l'espace $\mathbf{R}^\mu \times \mathbf{R}^m$ par rapport au groupe des difféomorphismes préservant le *cylindre discriminant* (produit direct de l'ensemble de bifurcation des zéros dans $\mathbf{R}^\mu$ par $\mathbf{R}^m$).

Choisissons comme déploiements miniversels des singularités simples, des déploiements de la forme $F(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_l e_i(x)$, où $\{e_l\}$ est base monomiale de l'algèbre locale et e_1 est de degré quasi homogène maximal (par exemple, pour A_μ on a $F = \pm x^{\mu+1} + \lambda_1 x^{\mu-1} + \ldots + \lambda_\mu$). Les coordonnées dans $\mathbf{R}^m$ seront notées $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ (si bien que toutes les coordonnées dans l'espace-temps sont $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu, \tau_1, \ldots, \tau_m)$).

Définition. On appelle *métamorphose spéciale* d'un front, une métamorphose pour laquelle le grand front est le cylindre discriminant décrit plus haut et la fonction du temps se présente sous la forme

$$t = \pm\lambda_1 \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2 \quad \text{ou} \quad t = \tau_1.$$

Théorème. *Les métamorphoses de fronts dans des familles génériques à un paramètre dans les espaces de dimension $l < 6$ sont localement fortement équivalentes à des germes de métamorphoses spéciales en* 0, *avec $\mu + m = l + 1$.*

Les métamorphoses des fronts dans l'espace tridimensionnel décrites par ce théorème sont montrées sur la figure 63.

22.2. Métamorphoses des fronts et groupes engendrés par les réflexions. Soit dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^\mu$ un groupe irréductible G engendré par des réflexions des types A_μ, D_μ ou E_μ respectivement

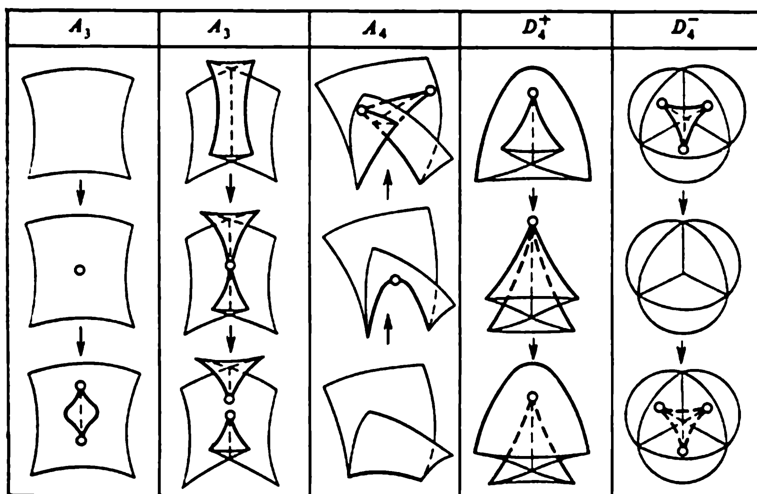


Fig. 63

(pour A_μ, c'est le groupe des permutations de coordonnées dans l'hyperplan $x_1 + \ldots + x_{\mu+1} = 0$).

Le groupe opère également sur le complexifié $\mathbf{C}^\mu$ de l'espace $\mathbf{R}^\mu$. Considérons sa variété des orbites. On sait que c'est un espace B isomorphe à $\mathbf{C}^\mu$: les coordonnées dans cet espace sont des invariants de la base $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ (pour A_μ ce sont les coefficients d'un polynôme de degré $\mu + 1$ où la somme des racines $\{x_1, \ldots, x_{\mu+1}\}$ est nulle).

Une application v: $\mathbf{C}^\mu \to B$ qui à un point associe son orbite sera appelée *application de Viète*. Une fonction f: $B \to \mathbf{C}$ admet comme image réciproque v^*f par une application de Viète une fonction symétrique (un invariant) dans $\mathbf{C}^\mu$. La fonction $v^*\lambda_1$ est l'invariant de plus bas (second) degré (il est unique, car le groupe est irréductible).

La plupart des orbites se composent de $|G|$ points. De telles orbites sont dites *régulières*. Considérons la variété des orbites non régulières. On voit sans peine que c'est une hypersurface dans $\mathbf{C}^\mu$ qui est difféomorphe au diagramme de bifurcation des zéros de la singularité correspondante (par exemple, pour A_μ c'est la variété des polynômes $x^{\mu+1} + \lambda_1 x^{\mu-1} + \ldots + \lambda_\mu$ de discriminant nul).

On dit que les difféomorphismes g: $(\mathbf{C}^\mu, 0) \to (\mathbf{C}^\mu, 0)$ et h: $(B, 0) \to (B, 0)$ sont *adaptés-Viète* si $v \circ g = h \circ v$: en ce cas g est appelé *relèvement de h*, et h, *abaissement de g*.

On voit sans peine que les difféomorphismes (germes) relevés coïncident avec les difféomorphismes qui préservent la variété des orbites non régulières, et les difféomorphismes (germes) abaissés, avec des difféomorphismes équivariants (i.e. commutant avec l'ac-

tion du groupe engendré par les réflexions). Le point important est que les difféomorphismes équivariants peuvent être abaissés ; on le montre de la façon suivante.

Il est clair qu'un difféomorphisme équivariant induit un homéomorphisme de l'espace des orbites, régulier sur la variété des orbites régulières ; d'après le théorème de la singularité supprimable, la régularité est conservée aussi dans les autres points.

Démonstration du théorème sur les métamorphoses (dans le cas complexe). Pour une fonction générique t: $(B, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ non dégénérée en 0 on a $\partial t/\partial\lambda_1 \neq 0$. Sous cette hypothèse l'invariant v^*t a la différentielle seconde non dégénérée en 0. D'après le lemme de Morse équivariant (voir n° 17.3), un difféomorphisme équivariant g: $(\mathbf{C}^\mu, 0) \to (\mathbf{C}^\mu, 0)$ transforme v^*t en $v^*\lambda_1$. En abaissant ce difféomorphisme, nous voyons que les germes t et λ_1 en 0, transformés l'un dans l'autre par l'action du groupe des difféomorphismes B conservant la variété des orbites non régulières, sont équivalents. Cela démontre le théorème pour $m = 0$.

Si $m > 0$, on commence par considérer la restriction de t à l'arête $0 \times \mathbf{C}^m$ du cylindre discriminant. Pour t générique cette restriction ou bien est régulière en tout point de l'arête (auquel cas $t \sim \tau_1$), ou bien elle y admet un point critique non dégénéré (de Morse). D'après le lemme de Morse paramétrique, la fonction t est équivalente à la somme d'une forme quadratique non dégénérée de τ et d'une fonction de λ ; en situation générique cette dernière est équivalente à λ_1 (ce qui vient d'être montré pour $m = 0$). Le théorème s'en trouve démontré dans le cas complexe. Il l'est aussi dans le cas réel analytique et dans le cas réel différentiable (pour les détails nous renvoyons à [23]).

Remarque. V. Zakalyukin [340] a étendu le théorème des métamorphoses sur les fronts au cas d'une singularité quasi homogène arbitraire.

Dans le cas quasi homogène le déploiement V-versel est R-versel et peut être choisi sous la forme d'un déploiement miniversel

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 e_1(x) + \ldots + \lambda_\mu e_\mu(x),$$

où e_k sont des monômes ; on suppose comme précédemment que e_1 soit le monôme de plus haut degré (quasi homogène). Considérons en outre l'ensemble de tous les *monômes diagonaux* $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ de même degré quasi homogène que f (s'ils existent). *Un germe de fonction t générique au voisinage du point $\lambda = 0$ de $\mathbf{R}^\mu$ peut être mis, par un difféomorphisme local de $\mathbf{R}^\mu$ préservant l'ensemble de bifurcation des zéros du déploiement F de f, sous la forme*

$$\pm\lambda_1 + a(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}).$$

Pour les déploiements à plus de μ *paramètres* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu, \tau_1, \ldots$ $\ldots, \tau_m)$ *la forme correspondante est*

$$\pm\lambda_1 + a(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}) \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2 \text{ ou } \tau_1.$$

La démonstration est fondée sur la description suivante du module des germes analytiques de champs de vecteurs tangents à la variété discriminante: c'est un module libre à μ générateurs sur l'algèbre des germes en 0 de fonctions de λ, les générateurs en question étant constitués par μ champs de vecteurs

$$v_i \equiv \sum v_{i,j}(\lambda)\, \partial/\partial\lambda_j$$

dont les composantes se calculent à partir des décompositions

$$e_i F(x, \lambda) \equiv \sum h_{i,j}(x, \lambda)\, \partial F/\partial x_j + \sum v_{i,j}(\lambda)\, e_j(x)$$

dont l'existence est garantie en vertu du théorème de préparation. (Pour les singularités simples, les générateurs peuvent aussi être décrits comme des abaissements-Viète des gradients d'invariants de la base, cf. [23].)

22.3. Bifurcations des caustiques. Dans des familles d'applications lagrangiennes à un paramètre, on voit se produire des métamorphoses pour certaines valeurs du paramètre, si bien qu'on y rencontre des caustiques instantanées non génériques. La méthode de l'espace-temps permet d'analyser ces caustiques comme on l'a fait pour les métamorphoses sur les fronts.

Une famille de caustiques instantanées d'une application lagrangienne dépendant du temps t peut être assimilée à une hypersurface dans l'espace-temps (dans le produit direct de l'espace ambiant de la caustique par l'axe du temps). Cette hypersurface est caustique de l'application lagrangienne dans l'espace-temps.

En effet, supposons l'application lagrangienne instantanée définie localement à l'instant t par une famille génératrice $F_t(x, \lambda)$, où λ est un paramètre d'un espace de dimension l. Alors la même famille de fonctions de x, regardée comme une famille avec un paramètre (λ, t) d'un espace de dimension $l + 1$, définit une application lagrangienne dans l'espace-temps dont la caustique est une hypersurface dans l'espace-temps constituée des caustiques instantanées. Nous appellerons cette hypersurface *grande caustique*.

Pour les familles génériques d'applications lagrangiennes à un paramètre, la grande caustique ne peut avoir que des singularités standards (en tout cas, pour les petites dimensions toutes ces singularités sont énumérées).

Les métamorphoses sur les caustiques et l'équivalence des caustiques sont définies comme dans le cas des fronts. V. Zakalyukin a établi la liste des formes normales des fonctions du temps pour les cas où la grande caustique admet des singularités A_μ ou D_μ [342].

La grande caustique peut être décrite comme l'ensemble des valeurs critiques d'une application $(x, \lambda, \tau) \mapsto (y = \partial F/\partial x, \lambda, \tau)$, où l'on a

$$F = \pm x^{\mu+1} + \lambda_1 x^{\mu-1} + \ldots + \lambda_{\mu-2} x^2, \qquad \lambda \in \mathbf{R}^{\mu-2}, \quad \tau \in \mathbf{R}^m, \qquad \text{pour } A_\mu;$$

$$F = x_1^2 x_2 \pm x_2^{\mu-1} + \lambda_1 x_2^{\mu-2} + \ldots + \lambda_{\mu-3} x_2^2, \quad \lambda \in \mathbf{R}^{\mu-3}, \quad \tau \in \mathbf{R}^m, \qquad \text{pour } D_\mu$$

(la dimension de l'espace-temps est $\mu - 1 + m$).

Un germe de fonction du temps générique peut être réduit en chaque point par une *équivalence ordinaire des métamorphoses* au germe en 0 de la fonction

$$t = \tau_1 \text{ ou } t = \pm\lambda_1 \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2 \text{ pour } A_\mu$$

et

$$t = \tau_1 \text{ ou } t = \pm\lambda_1 + y_1 + a\lambda_2 \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2 \text{ pour } D_\mu$$

(pour $\mu = 4$ on prendra ay_2 au lieu de $a\lambda_2$; $y_k = \partial F/\partial x_k$).

Pour l'*équivalence forte*, la seconde formule dans le cas de D_μ devient plus compliquée:

$$t = \pm\lambda_1 + Py_1 + Q \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2,$$

où $P = 1 + a_1\lambda_2 + \ldots + a_\nu\lambda_2^\nu$, $Q = b_1\lambda_2 + \ldots + b_\nu\lambda_2^\nu$, $\mu = 2\nu + 2$ ou $2\nu + 3$; pour $\mu = 4$ on prendra ay_2 au lieu de $a\lambda_2$.

Sur des familles génériques de caustiques à un paramètre dans des espaces de dimension $l < 4$, il ne peut y avoir que des métamorphoses équivalentes à celles des types A_μ, D_μ, énumérées plus haut, où $\mu - 2 + m = l$.

Par exemple, les métamorphoses génériques des caustiques dans l'espace tridimensionnel sont décrites par les formules suivantes:

$$A_3\colon F = x^4 + \lambda_1 x^2, \quad t = \tau_1 \text{ ou } \pm\lambda_1 \pm \tau_1^2 \pm \tau_2^2;$$
$$A_4\colon F = x^5 + \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2, \quad t = \tau_1 \text{ ou } \pm\lambda_1 \pm \tau_1^2;$$
$$D_4\colon F = x_1^2 x_2 \pm x_2^3 + \lambda_1 x_2^2, \quad t = \tau_1 \text{ ou } \pm\lambda_1 + y_1 + ay_2 \pm \tau_1^2;$$
$$A_5\colon F = x^6 + \lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2, \quad t = \pm\lambda_1;$$
$$D_5\colon F = x_1^2 x_2 + x_2^4 + \lambda_1 x_2^3 + \lambda_2 x_2^2, \quad t = \pm\lambda_1 + y_1 + a\lambda_2.$$

Les figures 64 et 65 représentent ces caustiques (nous donnons la forme de la caustique pour $t = -\varepsilon$, $t = 0$ et $t = +\varepsilon$, ε petit).

Dans l'abondante littérature consacrée à la « théorie des catastrophes », nous ne croyons pas avoir rencontré d'images des métamorphoses génériques des caustiques dans l'espace tridimensionnel. Ces images de sections tridimensionnelles génériques donnent une idée plus claire sur les caustiques de A_5 et D_5 que des séries de sec-

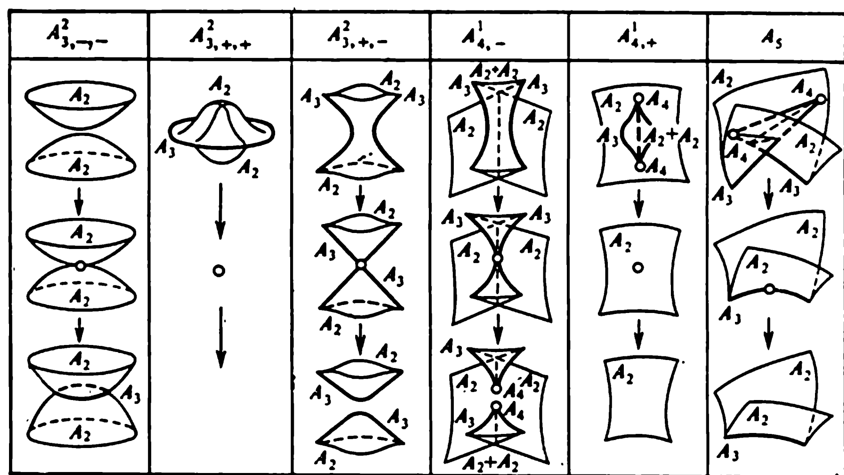


Fig. 64

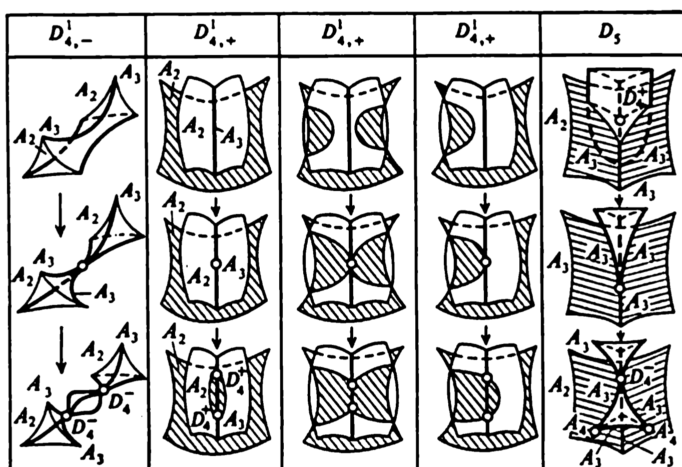


Fig. 65

tions bidimensionnelles et des sections tridimensionnelles mal choisies (voir par exemple [247]).

Exemple. Considérons un milieu de particules sans interactions et supposons qu'une particule se trouvant en un point x ait à l'instant initial une vitesse $v(x)$. Le mouvement des particules par inertie définit une application $x \mapsto x + tv(x)$. Pour t petit cette application est un difféomorphisme (à moins que v ne se conduise pas

trop mal à l'infini), mais à partir d'un certain instant des singularités apparaissent (les particules entrent en collisions).

D'après Ia. Zeldovitch, l'apparition des singularités (amas de particules) dans cette situation décrit le stade initial de formation des galaxies, avec le champ de vitesses initial potentiel : $v = \text{grad } S$. Nous sommes conduits à envisager une famille d'applications lagrangiennes à un paramètre $x \mapsto x + t\, \partial S/\partial x$; les caustiques sont les lieux des amas de particules.

Pour S générique la première caustique apparaît à la suite d'une métamorphose du type A_3: $F = x^4 + \lambda x^2$, $t = \lambda + \tau_1^2 + \tau_2^2$. Au bout d'un temps très court ε après l'instant de naissance t_0 de la caustique, celle-ci prend la forme d'une lentille (ou d'une « soucoupe volante ») avec une arête de rebroussement presque elliptique ; pour ε petit les axes de cette ellipse sont de l'ordre de $\varepsilon^{1/2}$ et son épaisseur, de l'ordre de $\varepsilon^{3/2}$.

Ia. Zeldovitch a obtenu ces résultats à partir des considérations suivantes. Les points critiques à l'instant t sont des points pour lesquels $\det (E + t\, \partial^2 S/\partial x^2) = 0$, i.e. des points en lesquels $\partial^2 S/\partial x^2$ a comme nombre propre $\lambda = -1/t$. Regardons le nombre propre comme une fonction (trivalente) de x. Pour S générique la valeur minimale de cette fonction correspond à un minimum non dégénéré, c'est pourquoi pour ε petit l'ensemble critique est proche d'un ellipsoïde à axes de l'ordre de $\varepsilon^{1/2}$.

Pour ε petit, les directions des noyaux de la dérivée de l'application dans les points de cet « ellipsoïde » sont voisines de la direction du noyau de la dérivée au point de naissance de la singularité pour $\varepsilon = 0$. L'ensemble des points critiques de la restriction de l'application à l'« ellipsoïde » est donc proche de l'ellipse suivant laquelle l'ellipsoïde est coupé par un plan diamétral.

Sur cette quasi-ellipse l'application a une singularité du type fronce, d'où l'on déduit facilement la description précédente de la « lentille » des valeurs critiques.

22.4. Classification des diagrammes d'applications. Les problèmes de détermination des métamorphoses des caustiques et des fronts d'ondes sont équivalents aux problèmes de classification des diagrammes d'applications du type $M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{f} \mathbf{R}$, où h est une application lagrangienne ou legendrienne. Le problème de détermination des métamorphoses dans des familles génériques d'applications différentiables à un paramètre conduit à une classification des diagrammes du même type pour des applications génériques $h: M \to N$.

Théorème. *Soit $h: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une application de Whitney. Alors, pour une fonction générique f, le germe de diagramme $\mathbf{R}^n \xrightarrow{h} \mathbf{R}^n \xrightarrow{f} \mathbf{R}$*

en chaque point est fortement équivalent au germe en 0 *défini par*

$$h:\ y_1 = x_1^{\mu+1} + x_2 x_1^{\mu-1} + \ldots + x_\mu x_1,\quad y_s = x_s \quad (s=2,\ldots,n),$$

$$f = \pm y_2 \pm y_{\mu+1}^2 \pm \ldots \pm y_n^2 \text{ ou } f = y_{\mu+1} \quad (1 < \mu \leqslant n).$$

$$f = \pm y_1 \pm y_2^2 \pm \ldots \pm y_n^2 \text{ ou } f = y_2 \quad (\mu = 1).$$

La démonstration résulte de la classification des métamorphoses des fronts, car les difféomorphismes conservant le front de A_μ sont h-relevables (pour les détails nous renvoyons à [23]).

Pour $n \leqslant 3$ l'application générique h ne peut avoir que des singularités de Whitney.

Corollaire. *Les métamorphoses dans les familles génériques à un paramètre d'applications d'espaces de même dimension* $k \leqslant 2$ *sont fortement équivalentes à celles définies par les germes en* 0 *des applications suivantes*:

k	$y = h(x)$	f
0	$y = x$ $y = x^2$	$y,\ \pm y^2$ $\pm y$
1	$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2$ $y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2$ $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2,\ y_2 = x_2$	$y_1,\ \pm y_1^2 \pm y_2^2$ $y_2,\ \pm y_1 \pm y_2^2$ $\pm y_2$
2	$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_3$ $y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_3$ $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_3$ $y_1 = x_1^4 + x_2 x_1^2 + x_3 x_1,\ y_2 = x_2,$ $y_3 = x_3$	$y_1,\ \pm y_1^2 \pm y_2^2 \pm y_3^2$ $y_2,\ \pm y_1 \pm y_2^2 \pm y_3^2$ $y_3,\ \pm y_2 \pm y_3^2$ $\pm y_2$

D'autres problèmes géométriques conduisent à la classification des diagrammes d'applications $\mathbf{R} \xleftarrow{f} M \xrightarrow{h} N$.

Considérons par exemple le problème de l'enveloppe d'une famille à un paramètre d'hypersurfaces dans $N = \mathbf{R}^n$. Dans ce cas f est une fibration auxiliaire $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ et h une application de plongement des fibres de f dans l'espace ambiant $\mathbf{R}^n$. L'enveloppe est l'ensemble des valeurs critiques de h.

Exemple. Les formules $h:\ y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2,\ f = x_1 + x_2$ définissent une famille de paraboles $y_1 = (c - y_2)^2$ à tangente commune $y_1 = 0$.

Théorème (N. Nikichine, 1975, cf. [23]). *Si h est application d'un pli et f est générique, alors le germe de diagramme* $\mathbf{R} \xleftarrow{f} \mathbf{R}^n \xrightarrow{h} \mathbf{R}^n$ *en chaque point du pli est formellement équivalent à un des germes suivants en* 0:

$$h:\ y_1 = x_1^2,\quad y_s = x_s\quad (s \geqslant 2),$$

$$f = x_1 + x_n,\ x_n + x_1x_n \pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_{n-1}^2,$$
$$x_1 \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_n^2,\ x_1x_2 + x_3.$$

Exemple. Pour $n = 2$ on a trois formes normales: soit $f = x_1 + x_2$, soit $f = x_1 + x_2^2$, soit $f = x_2 + x_1x_2 + x_1^2$.

Pour les familles à un paramètre de courbes planes définies par ces formules, nous avons respectivement:

1) un point générique de l'enveloppe;

2) un point où les courbes perdent le contact avec l'enveloppe, lorsque deux points de tangence avec l'enveloppe se confondent (« métamorphose $W \to U$ »);

3) un point de rebroussement d'une courbe de la famille sur l'enveloppe (« métamorphose $\gamma \to U$ »).

On peut déduire les courbes de la famille à partir du parapluie de Whitney dans $\mathbf{R}^3$ en faisant ses sections par des plans transversaux parallèles.

J. P. Dufour a démontré des théorèmes analogues pour le cas différentiable [92], [93].

En situation holomorphe, malgré la forme normale formelle simple, on a des modules fonctionnels; autrement dit, le type holomorphe d'un germe de diagramme dépend d'une fonction holomorphe arbitraire (S. Voronin [316]).

Pour le problème des diagrammes

$$\mathbf{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbf{R}^2 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f_1} \mathbf{R} \\ \xrightarrow{f_2} \mathbf{R} \end{smallmatrix}$$

(où h est une fronce de Whitney et $f_{1,2}$ des fibrations transversales), la forme normale formelle s'écrit

$$h:\ y_1 = x_1^3 + x_1x_2,\quad y_2 = x_2,\quad f_1 = x_1 + x_2,\quad f_2 = x_1 - x_2.$$

J. P. Dufour a montré [91] que cette forme normale est aussi valable dans le cas différentiable. Quant au cas holomorphe, S. Voronin a montré que le diagramme ne peut pas en général être réduit à une telle forme normale. Cela est lié à la divergence des formes normales pour des applications holomorphes de $(\mathbf{C}, 0)$ dans lui-même de nombre propre 1, qui se décomposent en produit de deux involutions. Pour cette raison on constate la divergence déjà pour

le diagramme $\mathbf{C} \leftarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ dont les applications admettent un point critique commun [317], [97].

Pour une équivalence ordinaire (non forte), les formes normales formelles des germes génériques de diagrammes $\mathbf{R} \leftarrow M \rightarrow N$, où $\dim M = \dim N = n \leqslant 3$, sont les suivantes (cf. [22], [23]):

n	$h\colon M \to N$	$f\colon M \to \mathbf{R}$
1	$y = x$ $y = x^2$	x, x^2 $x + \varphi(x^2)$
2	$y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2$ $y_1 = x_1^3 + x_1x_2$, $y_2 = x_2$	x_1, $\pm x_1^2 \pm x_2^2$ $x_1 + x_2$, $x_1 \pm x_2^2$, $x_2 \pm x_1x_2 + x_1^3$ $\pm x_1 + \varphi(h(x))$
3	$y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ $y_1 = x_1^3 + x_1x_2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ $y_1 = x_1^1 + x_2x_1^2 + x_3x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$	x_1, $\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2$ $x_1 + x_2$, $x_1 \pm x_2^2 \pm x_3^2$, $x_2 + x_1x_3$, $x_2 \pm x_1x_2 + x_1^3 \pm x_1x_3^2$ $x_1 + x_3$, $x_1 \pm x_3^2 + \varphi(y_1(x), y_2(x))$, $x_3 \pm x_1^2 + x_1\varphi(y_1(x), y_2(x))$ $\pm x_1 + \varphi(y(x))$

22.5. Classification des singularités des enveloppes convexes. A l'étude des singularités legendriennes est étroitement lié le problème des singularités des enveloppes convexes de surfaces dans un espace vectoriel.

Théorème 1 (voir [341]). *Pour des surfaces génériques compactes dans* $\mathbf{R}^3$, *un germe d'enveloppe convexe en chaque point peut être réduit par un difféomorphisme local de l'espace ambiant à un des germes suivants en* 0:

1) $z = 0$;

2) $z = 0$ *pour* $x \leqslant 0$, $z = x^2$ *pour* $x \geqslant 0$;

3) $z = 0$ *pour* $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$; $z = x^2$ *pour* $x \geqslant 0$, $y \leqslant x$;
$z = \alpha^{-1}y^2$ *pour* $y \geqslant 0$, $y \geqslant \alpha x$;
$z = x^2 + (\alpha - 1)^{-1}(x - y)^2$ *pour* $x \leqslant y \leqslant \alpha x$,

où $\alpha > 1$ *et* (x, y, z) *sont des coordonnées dans* $\mathbf{R}^3$.

L'enveloppe convexe représente globalement la réunion d'un nombre fini de surfaces différentiables développables avec bord ou

angles qui sont difféomorphes à un triangle (T), à un carré (Q), à un cercle (S), à un demi-cercle (D) et à un cylindre (C), ainsi que d'un nombre fini de surfaces convexes (U). Entre parenthèses sont indiqués les nombres de surfaces de chaque type ; on a $3T - D = 2Q$, $T + U + S - Q \geqslant 1$.

Théorème 2 (voir [255]). *Pour des courbes génériques compactes dans* $\mathbf{R}^3$, *un germe d'enveloppe convexe en chaque point peut être réduit par un difféomorphisme local de l'espace ambiant à l'une des six formes suivantes :*

1) $z = 0$;
2) $z = 0$ *pour* $x \leqslant 0$, $z = x^2$ *pour* $x \geqslant 0$;
3) $z = |x|$;
4) $y = 4u^3 + 2xu$, $z = 3u^4 + u^2x$, *où* $2u^2 + x \geqslant 0$

(*queue d'aronde tronquée*) ;

5) $z = x^2$ *pour* $x \geqslant 0$, $y \leqslant x$; $z = y^2$ *pour* $y \geqslant 0$, $x \leqslant 0$; $z = 0$ *pour* $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$;
6) $z \geqslant x^2$ *pour* $x + y = 0$; $z = x^2$ *pour* $0 \leqslant x \leqslant -y$; $z = y^2$ *pour* $0 \leqslant y \leqslant -x$; $z = 0$ *pour* $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$.

Les singularités des enveloppes convexes de variétés génériques de dimension k dans $\mathbf{R}^n$ pour k et n grands ne sont pas classifiées. D'après V. Sédykh, des modules existent exactement pour $\max(k, n - k - 1) \geqslant 2$. Dans le cas $1 \leqslant k \leqslant n - 3$ on a toujours des modules fonctionnels qui sont des fonctions de k variables, et dans les cas $k = n - 1$ ou $n - 2$, $n \geqslant 5$, de $\geqslant 1$ variables. Pour $k = 2$, $n = 4$ le nombre des modules serait 2 (cf. [248], [256] à [258]).

On rencontre les singularités d'enveloppes convexes en théorie du contrôle optimal. Considérons par exemple les vitesses auxquelles un système quitte en un point donné l'espace de phases pour toutes les positions possibles des gouvernes. Ces vecteurs forment un ensemble appelé *indicatrice des vitesses*. Supposons que l'indicatrice soit une variété différentiable mais non convexe. Alors, compte tenu des stratégies mixtes, les vitesses de sortie forment l'enveloppe convexe de l'indicatrice.

L'*ensemble d'atteignabilité du but* est l'ensemble des points de l'espace de phases à partir desquels on arrive à atteindre le but au bout d'un temps fini. La classification des singularités d'enveloppes convexes constitue précisément une des étapes de l'étude des singularités de la frontière de l'ensemble d'atteignabilité.

Considérons, par exemple, sur une variété fermée de dimension 2, un système commandé défini par un champ différentiable d'indicatrices ; soit le but une courbe fermée différentiable. A. Davydov a établi une classification des singularités de la frontière de l'ensemble d'atteignabilité pour les champs d'indicatrices et les buts

génériques. A un difféomorphisme local près, elles sont les mêmes que les singularités en 0 des courbes $y = x^\alpha \operatorname{sgn} x$ et les singularités des images des courbes $y = (1 + c \operatorname{sgn} x) \mid x \mid^\alpha$ par une application pli. Les singularités de ces types apparaissent de façon stable, tandis que toutes les singularités plus compliquées de la frontière de l'ensemble d'atteignabilité peuvent être supprimées en faisant bouger le champ d'indicatrices. Dans le premier cas on a $\alpha = 1$, 2 ou 3 (cf. [31] et aussi [78], [79]).

22.6. Cobordismes lagrangiens et legendriens. Une variété lagrangienne dans l'espace de phases décrit, au niveau de l'optique géométrique, un état ondulatoire dans l'espace de configuration. L'état ondulatoire à l'intérieur d'un domaine définit celui à sa frontière. Nous sommes ainsi conduits à la notion du *bord lagrangien* d'une variété lagrangienne.

On dit que deux sous-variétés lagrangiennes immergées d'espaces de fibrations cotangentes sont *Lagrange-cobordantes* si leur différence est le bord lagrangien de la variété lagrangienne immergée.

Le cas le plus simple où l'on rencontre des cobordismes legendriens est le suivant. Considérons un front d'onde qui se propage dans l'air. Les traces laissées par le front sur le sol peuvent avoir des types topologiques différents à des instants différents, mais elles (ou plus exactement les variétés legendriennes correspondantes) restent Legendre-cobordantes.

Les classes de variétés immergées Lagrange (Legendre)-cobordantes forment des groupes.

Le groupe des classes de cobordisme lagrangien orienté de courbes planes orientées est isomorphe à $\mathbf{Z} + \mathbf{R}$ (les invariants sont l'indice de Maslov et l'aire).

Le groupe des classes de cobordisme legendrien orienté de courbes legendriennes orientées dans la variété des 1-jets de fonctions $J^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Le générateur de ce groupe est la classe d'une courbe dont la projection dans la variété des 0-jets a la forme d'un nœud papillon (ou huit aux sommets pointus).

Un front d'onde de dimension un (orienté et équipé, i.e. orienté transversalement) sur un plan ou une sphère est Legendre-cobordant à plusieurs nœuds papillon (plus exactement, sont cobordantes des sous-variétés legendriennes de la variété des éléments de contact).

Le groupe des classes de cobordisme legendrien de fronts orientés et équipés sur le plan projectif est lui aussi isomorphe à $\mathbf{Z}$, mais son générateur est la classe d'un front avec un point de rebroussement et un point d'inflexion $y^2 = x^3$ (le nœud papillon est un générateur double).

La classe d'un front orienté équipé sur le plan projectif est définie par le nombre des points de rebroussement compte tenu du signe. Ce nombre est aussi égal au nombre des points d'inflexion : on admet

que l'inflexion est positive si la courbe traverse le point d'inflexion en s'éloignant de la normale d'équipement.

Le lecteur trouvera de plus amples détails sur les cobordismes lagrangiens et legendriens dans [28], où sont données des définitions formelles et sont calculés différents groupes des classes de cobordisme de fronts sur des surfaces de dimension deux.

Il y a quelques années, Ia. Eliashberg a réduit le calcul des groupes des cobordismes lagrangiens et legendriens à un problème d'homotopie. Par exemple, le groupe des classes de cobordisme legendrien orienté de sous-variétés legendriennes dans $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ est isomorphe à un groupe d'homotopie stable

$$\lim_{k\to\infty} \pi_{n+k}(T\lambda_k),$$

où λ_k est une fibration tautologique au-dessus de la variété grassmannienne des plans lagrangiens orientés dans $\mathbf{R}^{2k}$, et T veut dire « spectre de Thom ».

V. Vasiliev [312] a construit sur les variétés lagrangiennes et legendriennes des classes caractéristiques duales aux strates d'une classification des points critiques de fonctions (l'indice de Maslov correspond à A_2, il y a une classe de dimension cinq correspondant à A_6 ou à E_6, etc.) (cf. [47] à [49] et aussi [68], [313]).

POSTFACE

Depuis 1982, année de parution de notre ouvrage en russe, la théorie des singularités s'est enrichie de nouveaux résultats. Citons entre autres le calcul par C. Wall du « second domaine de bonnes dimensions » (où les applications typiques n'ont pas de modules fonctionnels) [323], la démonstration des hypothèses sur la semi-continuité du spectre [302] à [304], [270], la théorie des queues d'arondes ouvertes, la découverte d'un lien entre les variétés lagrangiennes et legendriennes à singularités avec les structures symplectiques et de contact de variétés de formes binaires et de polynômes [30], [34], [35], [117], [118], l'inclusion, dans le cadre de la théorie des singularités, des groupes de réflexions H_3 et H_4 ([40], [196], [263], [264], [307]), la classification des projections, d'un espace tridimensionnel dans le plan, des surfaces génériques de dimension 2 ([36], [241], [242], [262]), le calcul de l'anneau des cobordismes legendriens ([47] à [49], [50], [51]), la théorie des singularités à bord lagrangiennes et legendriennes ([89], [260], [261]), la théorie des singularités des puissances des formes de volume $f\ (dx)^{\alpha}$, y compris les structures de Poisson dans le plan ([40], [41], [174], [183], [305]), la classification des singularités des équations différentielles implicites ([79], [93]), des frontières d'ellipticité [214] et des frontières d'hyperbolicité (A. Weinstein, B. Shapiro, 1985), les limites de l'espace des systèmes fondamentaux de solutions (M. Kazarian, 1985), des frontières de l'ensemble de matrices stables [190], des bords d'enveloppes convexes de [257], [258], du diagramme de bifurcation de champs de vecteurs homogènes dans le plan (B. Hessine, 1985), la démonstration des formules du type Atiyah-Singer pour l'indice de points singuliers du champ potentiel ([141], [306]), l'apparition de F_4 dans la géométrie des surfaces à bord dans l'espace euclidien tridimensionnel [260].

J. Nye [228] a remarqué que toutes les caustiques d'applications lagrangiennes ne se réalisent pas globalement en optique ; le fait que la variété lagrangienne correspondante appartient à la surface de niveau d'un hamiltonien quadratique convexe par rapport aux

impulsions impose des restrictions globales à l'existence de singularités lagrangiennes. Il en découle que certaines métamorphoses des caustiques sont irréalisables en optique. En particulier, ne se réalise pas en optique la naissance d'une « soucoupe volante » (A_{3++}^2 sur la figure 64, p. 302). Une théorie topologique générale de ces phénomènes est proposée par You. Tchékanov, 1985. Elle utilise essentiellement le fait que la direction caractéristique n'appartient pas au cône tangent à la variété des points critiques de la projection lagrangienne.

Certains nouveaux résultats sont exposés dans [36] à [39], [43], [44], [57], [160], [266].

BIBLIOGRAPHIE

Abréviations

FAP = Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya
FAA = Functional Analysis and its Applications (Eng. trans. of FAP)
UMN = Uspekhi Matematicheskykh Nauk
RMS = Russian Mathematical Surveys (Eng. trans. of major part of UMN)
INT = Itogi naouki i tekhniki (Le point des connaissances scientifiques et techniques)

ALEKSANDROV A. G.
[1] Deformations of bouquets of quasihomogeneous one-dimensional singularities. FAP 15 : 1 (1981), 67-68, FAA 15, 53-54.
ALEKSANDROV A. G.
[2] Normal forms of one-dimensional quasihomogeneous complete intersections. Mat. Sbornik 117 : 1 (1982).
ALGEBRAIC SURFACES
[3] Proc. Mat. Inst. V. A. Steklov, LXXV, Moscow, Nauka (1965), AMS Providence, RI (1967).
A'CAMPO N.
[4] Le nombre de Lefschetz d'une monodromie. Indag. Math. 76 (1973), 113-118.
A'CAMPO N.
[5] La fonction zêta d'une monodromie. Comm. Math. Helv. 50 (1975), 233-248.
A'CAMPO N.
[6] Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes. I. Math. Ann. 213 (1975), 1-32.
A'CAMPO N.
[7] Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes. II. Proc. Int. Cong. Math. Vancouver 1 (1974), 395-404.
ARNOLD V. I.
[8] A remark on the Weierstrass preparation theorem. FAP 1 : 3 (1967), 1-8, FAA 1 : 3, 1-9.
ARNOLD V. I.
[9] Singularities of smooth mappings. UMN 23 : 1 (1968), 3-44, RMS 23 : 1, 1-44.
ARNOLD V. I.
[10] On matrices depending on parameters. UMN 26 : 2 (1971), 101-114, RMS 26 : 2, 29-44.
ARNOLD V. I.
[11] Integrals of rapidly oscillating functions and singularities of projections of Lagrangian manifolds. FAP 6 : 3 (1972), 61-62, FAA 6, 222-225.

ARNOLD V. I.
[12] Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities. FAP 6 : 4 (1972), 3-25, FAA 6, 254-272.
ARNOLD V. I.
[13] Remarks on the stationary phase method and the Coxeter numbers. UMN 28 : 5 (1973), 17-44, RMS 28 : 5, 19-48.
ARNOLD V. I.
[14] Classification of unimodal critical points of functions. FAP 7 : 3 (1973), 75-76, FAA 7, 230-231.
ARNOLD V. I.
[15] Contact manifolds, Legendre mappings and singularities of wave fronts. UMN 29 : 4 (1974), 153-154.
ARNOLD V. I.
[16] Critical points of functions and the classification of caustics. UMN 29 : 3 (1974), 243-244.
ARNOLD V. I.
[17] Méthodes mathématiques de mécanique classique. Nauka, Moscou 1974; trad. fr. Ed. Mir, 1976; trad. angl.: Mathematical methods of classical mechanics, Springer, New York, 1978.
ARNOLD V. I.
[18] Normal forms of functions in the neighbourhood of degenerate critical points. UMN 29 : 2 (1974), 11-49, RMS 29 : 2, 19-48.
ARNOLD V. I.
[19] Critical points of smooth functions and their normal forms. UMN 30 : 5 (1975), 3-65, RMS 30 : 5, 1-75.
ARNOLD V. I.
[20] Spectral sequences for reducing functions to normal form. Problems of mechanics and mathematical physics. Nauka, Moscow 1976, 7-20. Eng. trans.: Sel. Math. Sov., 1 : 1, 3-18, Birkhäuser, 1981.
ARNOLD V. I.
[21] Some open problems in the theory of singularities. Proc. Sem. S. L. Sobolev, 1 (1976), 5-15. Eng. trans.: Proc. AMS Symp. Pure Math. 40, Part 1 (1983).
ARNOLD V. I.
[22] On the theory of envelopes. UMN 31 : 3 (1976), 172-173.
ARNOLD V. I.
[23] Wave front evolution and the equivariant Morse lemma. Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), 557-582.
ARNOLD V. I.
[24] Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires. Nauka, Moscou, 1978; trad. fr. Ed. Mir, 1980; trad. angl.: Additional chapters in the theory of ordinary differential equations, Springer, 1983.
ARNOLD V. I.
[25] Index of a singular point of a vector field, the Petrovskii-Oleinik inequality and mixed Hodge structures. FAP 12 : 2 (1978), 1-14, FAA 12, 1-11.
ARNOLD V. I.
[26] Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k, C_k and F_4 and singularities of evolutes. UMN 33 : 5 (1978), 91-105, RMS 33 : 5, 99-116.
ARNOLD V. I.
[27] Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, the convolution of invariants of groups generated by reflections, and the singular projections of smooth surfaces. UMN 34 : 2 (1979), 3-38, RMS 34 : 2, 1-42.

ARNOLD V. I.
[28] Lagrange and Legendre cobordism. FAP 14 : 3 (1980), 1-13, 14 : 4, 8-17, FAA 14, 167-177, 252-260.
ARNOLD V. I.
[29] On some problems in singularity theory. Geometry and Analysis, Papers dedicated to the memory of V.K. Patodi. Bombay, 1980. Also in Proceedings of the Indian Acad. of Sc. (Math. Sc.), 9 : 1, 1-9, 1981.
ARNOLD V. I.
[30] Lagrangian manifolds with singularities, asymptotic rays and the open swallow-tail. FAP 15 : 4 (1981), 1-14, FAA 15, 235-245.
ARNOLD V. I.
[31] Catastrophe Theory. Moscow, Knowledge, Serie « Mathematics, cybernetics », 1981. No. 9, 64 pages. Eng. trans.: Springer, 1984, 82 p.
ARNOLD V. I., ZEL'DOVICH Ya. B., SHANDARIN S. F.
[32] Elements of the large-scale structure of the Universe. UMN 36 : 3 (1981), 244-245.
ARNOLD V. I., OLEINIK O. A.
[33] The topology of real algebraic manifolds. Vest. MGU ser. mat. 6 (1979), 7-17.
ARNOLD V. I.
[34] Potential flows of incollisionless particles, Lagrangian, singularities and metamorphoses of caustics in R^3. Proc. Sem. I. G. Petrovskii 8 (1982), 21-57.
ARNOLD V. I.
[35] Singularities of Legendre varieties, of evolvents and of fronts at an obstacle. Ergodic theory and dynamical systems 2 (1982), 301-309.
ARNOLD V. I.
[36] Singularities of ray systems. UMN 38 : 2 (1983), 77-147; RMS (1983).
ARNOLD V. I.
[37] Singularities of ray systems. ICM, Warsaw, 1983; Elsevier, Amsterdam, 1984, p. 27-50.
ARNOLD V. I.
[38] Catastrophe theory. Springer, Berlin, 1984, p. 1-82.
ARNOLD V. I.
[39] Théorie des catastrophes. Mathématiques contemporaines. Directions fondamentales 5, VINITI, Moscou, 1986 (en russe).
ARNOLD V. I.
[40] Singularities in variational calculus. UMN 39 : 5 (1984), 256; RMS (1984).
ARNOLD V. I.
[41] Remarques sur les structures de Poisson dans le plan et sur d'autres puissances des formes de volume. Travaux du séminaire I. Petrovski, 11 (1985).
ARNOLD V. I.
[42] Equations différentielles ordinaires. 3e éd., Nauka, Moscou, 1984 (en russe).
ARNOLD V. I., GIVENTAL A. B.
[43] Géométrie symplectique. Mathématiques contemporaines. Directions fondamentales 4, VINITI, Moscou, 1985 (en russe); trad. angl.: Springer, 1986.
ARNOLD V. I., VARCHENKO A. N., GIVENTAL A. B., KHOVANSKIĬ A. G.
[44] Singularities of functions, wave fronts, caustics and multidimensional integrals. Math. Phys. Reviews 4 (1984), 1-92.
ARTIN M.
[45] On the solution of analytic equations. Invent. Math. 5 (1968), 277-291.

ATIYAH M. F.
[46] Resolution of singularities and division of distributions. Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 145-150.
AUDIN M.
[47] Quelques remarques sur certains groupes de cobordisme lagrangien. Univ. Paris-sud, 1983, 1-16.
AUDIN M.
[48] Remarques sur les nombres caractéristiques entiers de certaines immersions lagrangiennes. C.r. Acad. sci., Paris 297 (1983), 561-563.
AUDIN M.
[49] Classes caractéristiques d'immersions lagrangiennes définies par des variétés de caustiques (d'après Vasiliev). Sém. Sud-Rhodanien de géométrie, t. I, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984.
AUDIN M.
[50] Cobordismes des immersions legendriennes dans certaines variétés de contact. Univ. Paris-sud, 1984, 1-35.
AUDIN M.
[51] Quelques calculs en cobordisme lagrangien. Univ. Paris-sud, 1984, 1-37; Ann. Inst. Fourier, 1985.
BAAS N.
[52] Structural stability of composed mappings. Preprint, 1976.
BAKHTIN V. I.
[53] Averaging in multifrequency systems. FAP 20 (1986).
BANCHOFF T. F. — GAFFNEY T. — McCRORY C.
[54] Cusps of Gauss mappings. Pitman, Research Notes in Math., 1982.
BELITSKII G. R.
[55] Equivalence and normal forms of germs of smooth mappings. UMN, 33 : 1 (1978), 95-155, RMS, 33 : 1, 107-177.
BELITSKII G. R.
[56] On the stable equivalence of germs of functions. UMN, 33 : 5 (1978), 164.
BENNEQUIN D.
[57] Caustique mystique (d'après Arnold et al.). Sém. N. Bourbaki, 1984, exp. 634, 1-37.
BERNSHTEIN I. N.
[58] The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter. FAP 6 : 4 (1972), 26-40, FAA 6, 273-285.
BERNSHTEIN D. N., KUSHNIRENKO A. G., HOVANSKY A. G.
[59] Newton polyhedra. UMN 31 : 3 (1976), 201-202.
BIERSTONE E.
[60] General position of equivariant maps. Trans. Amer. Math. Soc. 234 (1977), 447-466.
BJORK I. E.
[61] Bernstein's functional equation, the local case. Preprint, Catholic University, Nijmegen, november, 1975.
BOARDMAN J. M.
[62] Singularities of differentiable maps. Publ. Math. IHES 33 (1967), 21-57.
BOURBAKI N.
[63] Lie groups and Lie algebras. Hermann, Paris, 1971.
BRIESKORN E.
[64] Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen. Manuscripta Math. 2 (1970), 103-161.
BRIESKORN E.
[65] Sur les groupes de tresses (d'après Arnold). Sém. Bourbaki, Exp. No. 401 (1971/72), 22-44; Lecture Notes in Mathematics, 317, Springer, Berlin, 1973.

BRIESKORN E.
[66] Special singularities — resolution, deformation and monodromy. Amer. Math. Soc. Lecture Notes prepared in connection with the Summer Institute on Algebraic Geometry held at Humboldt State University, Arcata, California, 1974.
BRIESKORN E.
[67] Die Hierarchie der 1-modularen Singularitäten, Bonn, 1978.
BRUCE J. W.
[68] Counting singularities. Proc. Roy. Soc., Edinburgh, A93 : 1, 2 (1982), 137-159.
BRUCE J. W., GAFFNEY T.
[69] Simple singularities of mappings (C, 0) → (C^2, 0). J. London Math. Soc. 26 : 3 (1982), 465-474.
BRUCE J. W.
[70] A note on first order differential equation of degree greater than one and wave front evolution. Bull. London Math. Soc. 16 : 2 (1984), 139-144.
BRYZGALOVA L. N.
[71] Singularities of the maximum of a parametrically dependent function. FAP 11 : 1 (1977), 59-60, FAA 11, 49-50.
BRYZGALOVA L. N.
[72] Maximum functions of a family of functions depending on parameters. FAP 12 : 1 (1978), 66-67, FAA 12, 50-51.
BÜCHNER M. A.
[73] Stability of the cut locus in dimensions less than or equal to 6. Invent. Math. 43 (1977), 224-233.
CHMUTOV S. V.
[74] Monodromy groups of singularities of functions of two variables. FAP 15 : 1 (1979), 61-66, FAA 15, 48-52.
CLEMENS C. H.
[75] Picard-Lefschetz theorem for families of nonsingular algebraic varieties acquiring ordinary singularities. Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), 93-108.
CODDINGTON E. A., LEVINSON N.
[76] The theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, New York, 1955.
DANILOV V. I.
[77] Newton polyhedra and vanishing cohomology. FAP 13 : 2 (1979), 32-47, FAA 13, 103-112.
DAVYDOV A. A.
[78] Limite d'atteignabilité d'un système commandé multidimensionnel. Travaux de l'Univ. de Tbilissi 232, 233 : 13, 14 (1982), 78-96.
DAVYDOV A. A.
[79] Normal form of a differential equation non solved with respect to the derivative in the neighbourhood of its singular point. FAP 19 : 2 (1985), 1-11.
DELIGNE P.
[80] Equations différentielles à points singuliers réguliers. Lecture Notes in Math. 163, Springer, Berlin, 1970.
DELIGNE P.
[81] Les immeubles des groupes des tresses généralisés. Invent. Math. 17 (1972), 273-302.
DEMAZURE M.
[82] Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. de l'ENS 4e série 3 (1970), 507-588.
DEMAZURE M.
[83] Classification des germes à point critique isolé et à nombres de modules 0

ou 1 (d'après V.I. Arnold). Sém. Bourbaki, 26e année, 1973/74, 443, février 1974.
DIMCA A., GIBSON G.
[84] Contact unimodular germs from the plane to the plane. Quart. J. Math. 34 : 135 (1983), 281-295.
DOLGACHEV I. V.
[85] Quotient-conical singularities on complex surfaces. FAP 8 : 2 (1974), 75-76, FAA 8, 160-161.
DOLGACHEV I. V.
[86] Automorphic forms and quasihomogeneous singularities. FAP 9 : 2 (1975), 67-68, FAA 9, 149-151.
DOLGACHEV I. V., NIKULIN V. V.
[87] Singularités exceptionnelles d'Arnold et les surfaces K-3. Conférence sur la topologie, Minsk, 1977.
DUBOIS J. G., DUFOUR J. P.
[88] La théorie des catastrophes. V. Transformées de Legendre et thermodynamique. Préprint, Montréal, 1977.
DUC N. H., DAI N. Z.
[89] Stabilité de l'interaction géométrique entre deux composantes holonomes simples. C.r. Acad. sci., Paris, 291 (1980), 113-116.
DUFOUR J. P.
[90] Une limite aux extensions du théorème de préparation. Comptes Rendus, sér. A. 282 (1976), 199-202.
DUFOUR J. P.
[91] Bistabilité des fronces. Inst. de Sciences et Techniques de Languedoc. Préprint, 1977.
DUFOUR J. P.
[92] Sur la stabilité de diagrammes d'applications différentiables. Ann. Sci. de l'ENS 10 (1977), 153-174.
DUFOUR J. P.
[93] Familles de courbes planes différentiables. Topologie 22 : 4 (1983), 449-474.
DUISTERMAAT J. J.
[94] Fourier integral operators, New York Univ. Press, New York, 1973.
DUISTERMAAT J. J.
[95] Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities. Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 207-281.
DURFEE A. H.
[96] Fibered knots and algebraic singularities. Topology 13 (1974), 47-59.
ECALLE J.
[97] Théorie itérative. Introduction à la théorie des invariants holomorphes. J. math. pures et appl., 54 (1975), 189-258.
EISENBUD D., LEVINE H.
[98] An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ. Ann. Math. 106 (1977), 19-38.
FEDORYUK M. V.
[99] La méthode du point selle. Nauka, Moscou, 1977.
FIELD M.
[100] Une version équivariante du théorème de la transversalité de Thom. Comptes Rendus 282 (1976), 379-381.
FUKUDA T.
[101] Local topological properties of differentiable mappings. Invent. Math. 65 (1981), 227-250.
GABRIELOV A. M.
[102] Formal relations between analytic functions. FAP 5 : 4 (1971), 64-65, FAA 5, 318-319.

GABRIELOV A. M.
[103] Intersection matrices for certain singularities. FAP 7 : 3 (1973), 18-32, FAA 7, 182-193.
GABRIELOV A. M.
[104] Dynkin diagrams for unimodal singularities. FAP 8 : 3 (1974), 1-6, FAA 8, 192-196.
GABRIELOV A. M.
[105] Bifurcations, Dynkin diagrams and modality of isolated singularities. FAP 8 : 2 (1974), 7-12, FAA 8, 94-98.
GABRIELOV A. M., KUSHNIRENKO A. G.
[106] Description of deformations with constant Milnor number for homogeneous functions. FAP 9 : 4 (1975), 67-68, FAA 9, 329-331.
GELFAND I. M., SHILOV G. E.
[107] Fonctions généralisées et actions exercées sur elles. I. Fizmatguiz, Moscou, 1959. Trad. fr.: Les distributions. Dunod, Paris, 1962; trad. angl.: Generalised functions, Academic Press, New York, 1964.
GELFOND O. A.
[108] Les racines d'un système de polynômes presque périodique. Acad. Sci. S.S.S.R., Phys. Inst. P.N. Lebedev. Préprint n° 200, 1981, 27 pages.
GELFOND O. A.
[109] L'indice d'un champ vectoriel presque périodique. Acad. Sci. S.S.S.R., Phys. Inst. P.N. Lebedev. Préprint n° 219, 1981, 27 pages.
GELFOND O. A., HOVANSKY A. G.
[110] On real Liouville functions. FAP 14 : 2 (1980), 52-53, FAA 14, 122-123.
GIBSON C. G., WIRTHMULLER K., DU PLESSIS A. A., LOOIJENGA E. J. N.
[111] Topological stability of smooth mappings. Lecture Notes in Math. 552, Springer, Berlin, 1976.
GIUSTI M.
[112] Classification des singularités isolées d'intersections complètes simples. Comptes Rendus 284 (1977), 167-170.
GIUSTI M.
[113] Classification des singularités isolées d'intersections complètes. 1-65. Ecole Polytechnique, 1977.
GIUSTI M.
[114] Sur les singularités isolées d'intersections complètes quasi homogènes. Ann. Inst. Fourier 27 : 3 (1977), 163-192.
GIVENTAL A. B.
[115] Convolution of invariants of groups generated by reflections and connected with simple singularities of functions. FAP 14 : 2 (1980), 4-14, FAA 14, 81-89.
GIVENTAL A. B.
[116] Convolution of invariants of groups, generated by reflections and connected with simple singularities of functions. FAP 14 : 2 (1980), 4-14, FAA 14, 81-89.
GIVENTAL A. B.
[117] Manifolds of polynomials, having a root of fixed comultiplicity and the generalised Newton equation. FAP 16 : 1 (1982), 13-17, FAA 16, 10-14.
GIVENTAL A. B.
[118] Lagrangean manifolds with singularities and irreducible sl_2-modulus. UMN 38 : 6 (1983), 123-124; RMS (1983).
GLAESER G.
[119] Fonctions composées différentiables. Ann. Math. 77 (1963), 193-209.
GOLUBITSKY M.
[120] Contact equivalence for Lagrangean submanifolds, Lecture Notes in Math. 468, 71-73, Springer, Berlin, 1975.

GOLUBITSKY M., GUILLEMIN V.
[121] Stable mappings and singularities. Springer, Berlin, 1974.
GOLUBITSKY M., SCHAEFFER D.
[122] A theory of imperfect bifurcations via singularity theory. Preprint, 1978.
GOMOZOV E. T.
[123] Déploiement versel de germes de difféomorphismes de classe de différentiabilité finie. Dok. Akad. Nauk Ukr. S.S.R., « A » 8 (1975), 679-681.
GOMOZOV E. T.
[124] Finite determinacy of germs of diffeomorphisms, with respect to conjugacy. Dok. Akad. Nauk Ukr. SSR, « A » 9 (1976), 773-775.
GORYUNOV V. V.
[125] The Poincaré polynomial of a space of form-residues on a quasi-homogeneous complete intersection. UMN 35 : 2 (1981), 205-206, RMS 35, 241-242.
GORYUNOV V. V.
[126] Geometry of bifurcation diagrams of simple projections to the line. FAP 15 : 2 (1981), 1-8, FAA 15, 77-82.
GORYUNOV V. V.
[127] Adjacences de spectres de certaines singularités. Vest. MGU sér. math. 4 (1981), 19-22.
GORYUNOV V. V.
[128] Singularités de projections d'intersections complètes. INT. Problèmes actuels des mathématiques, 22, 167-206, Moscou, VINITI, 1983 (en russe). Trad. angl.: J. Sov. math., 27 (1984).
GRAUERT H.
[129] Analytische Faserungen über holomorph-vollstandigen Raumen. Math. Ann. 135 (1958), 263-273.
GRIFFITHS P.
[130] Monodromy of homology and periods of integrals on algebraic manifolds. Mimeographed notes. Princeton Univ., 1968.
GRIFFITHS P.
[131] Variations on a theorem of Abel. Invent. Math. 35 (1976), 321-390.
GRIFFITHS P., HARRIS I.
[132] Residues and zero-cycles on algebraic varieties. Ann. Math. 108 (1978), 461-505.
GUCKENHEIMER J.
[133] Catastrophes and partial differential equations. Ann. Inst. Fourier 23 : 2 (1973), 31-59.
GUCKENHEIMER J.
[134] Caustics and nondegenerate Hamiltonians. Topology 13 (1974), 127-133.
GUNNING R., ROSSI H.
[135] Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall, New York, 1965.
GUSEIN-ZADE (=GOUSSEIN-ZADÉ) S. M.
[136] Intersection matrices for certain singularities of functions of two variables. FAP 8 : 1 (1974), 11-15, FAA 8, 10-13.
GUSEIN-ZADE S. M.
[137] Dynkin diagrams for singularities of functions of two variables. FAP 8 : 4 (1974), 23-30, FAA 8, 295-300.
GUSEIN-ZADE S. M.
[138] The characteristic polynomial of classical monodromy for a series of singularities. FAP 10 : 3 (1976), 78-79, FAA 10, 229-230.
GUSEIN-ZADE S. M.
[139] Monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces. UMN 32 : 2 (1977), 23-65, RMS 32 : 2, 23-69.

GUSEIN-ZADE S. M.
[140] Distinguished bases of simple singularities. FAP 14 : 4 (1980), 73-74, FAA 14, 307-308.
GUSEIN-ZADE S. M.
[141] Index of a singular point of a gradient vector field. FAP 18 : 1 (1984), 7-12.
GUCKENHEIMER J.
[142] Bifurcation and catastrophe, 95-110, in Dynamical Systems, proceedings of the Symposium at Salvador, Brazil. 1971, ed. MM Peixoto; N.Y. and London: Academic Press, 1972.
HIRONAKA H.
[143] Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. Ann. Math. 79 (1964), 109-203, 205-326.
HÖRMANDER L.
[144] Fourier integral operators. I. Acta Math. 127 (1971), 71-183.
HOUZEL C.
[145] Géométrie analytique locale. I. Sém. Henri Cartan, 18, 1960/61.
HOVANSKY A. G.
[146] Newton polyhedra and toroidal manifolds. FAP 11 : 4 (1977), 56-67, FAA 11, 289-295.
HOVANSKY A. G.
[147] Newton polyhedra and the Euler-Jacobi formula. UMN 33 : 6 (1978), 245-246.
HOVANSKY A.
[148] Sur les racines complexes de systèmes d'équations algébriques ayant un petit nombre de monômes. C.r. Acad. sci. Paris 292 (1981), 937-940.
HOVANSKY A.
[149] Théorème de Bezout pour les fonctions de Liouville. IHES. Préprint n° 45, sept. 1981, 1-31.
HOVANSKY A. G.
[150] Newton polyhedra and the genus of complete intersections. FAP 12 : 1 (1978), 51-61, FAA 12, 38-46.
HOVANSKY A. G.
[151] The geometry of convex polyhedra and algebraic geometry. UMN 34 : 4 (1979), 160-161.
HOVANSKY A. G.
[152] The rectification of parallel lines. Dokl. Akad. Nauk SSSR 250 (1980), 1074-1076.
HOVANSKY A. G.
[153] On the rectification of circles. Siber. Mat. Zhur. 21 : 4 (1980), 221-226, Siber. J. Math. 21 : 4, 221-226.
HOVANSKY A. G.
[154] On one class of systems of transcendental equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR 255 (1980), 804-807.
HOVANSKY A. G.
[155] Newton polyhedra and the index of a vector field. UMN 36 : 4 (1981), 234.
HOVANSKI A. G.
[156] Sur les racines complexes de systèmes d'équations algébriques ayant un petit nombre de monômes. C.r. Acad. sci. 292 (1981), 937-940.
HOVANSKI A. G.
[157] Real analytical manifolds with a finiteness property and complex abelian integrals. FAP 18 : 2 (1984), 40-50.
HOVANSKI A. G.
[158] Polyèdres de Newton (résolution de singularités). INT. Problèmes actuels des mathématiques, 22 (1983), 207-239, VINITI, Moscou. Trad. angl.: J. Sov. Math., 27 (1984).

ILIACHENKO Yu. S.
[159] Steepness criterion for analytical functions. UMN 39 (1985).
ITOGI NAUKI I TEKHNIKI (INT)
[160] Problèmes actuels des mathématiques 22 (1983), VINITI, Moscou, 244 p.
JANICH K.
[161] Caustics and catastrophes. Math. Ann. 209 (1974), 161-180.
KARPUSHKIN V. N.
[162] Uniform estimates of oscillatory integrals in R^2. Dokl. Akad. Sci. SSSR 257 (1981), 804-808.
KARPUSHKIN V. N.
[163] Uniform estimates of oscillatory integrals. UMN 36 : 4 (1981), 213.
KATZ N. M.
[164] The regularity theorem in algebraic geometry. *In*: Actes Cong. Int. Math., Nice, 1 (1970), 437-443, Dunod, Paris.
KAZARNOVSKIĬ B. Ya.
[165] On the zeros of exponential sums. Dokl. Akad. Nauk SSSR 257: 4 (1981), 804-808.
KAZARNOVSKIĬ B. Ya.
[166] Newton polyhedra and roots of systems of exponential sums. FAP 18 : 4 (1984), 40-49.
KEMPF G., KNUDSEN F., MUMFORD D., SAINT-DONAT B.
[167] Toroidal embeddings, 1. Lecture Notes in Math. 339, Springer, Berlin, 1973.
KERGOSIEN Y. L., THOM R.
[168] Sur les points paraboliques des surfaces. C.r. Acad. sci. Paris 290 (1980), 705-711.
KHIMSHIASHVILI G. N.
[169] On the local degree of a smooth map. Comm. Acad. Sci. Georgian SSR 85 : 2 (1977), 309-311.
KHOVANSKIĬ (= HOVANSKY) A. G.
[170] The index of a polynomial vector field. FAP 13 : 1 (1979), 49-58, FAA 13, 38-45.
KHOWANSKY A. G.
[171] Fewnomials and Pfaff manifolds. Proc. of Intern. Congress of Math., Warsaw, 1983; Elseveir, Amsterdam, 1984, p. 549-564.
KHOVANSKIĬ A. G.
[172] The geometry of formulas. *In*: Singularities of functions, wave fronts, caustics and multidimensional integrals. Math. phys. reviews 4 (1984), 67-90.
KOLMOGOROV A. N., FOMIN S. V.
[173] Eléments de théorie des fonctions et analyse fonctionnelle. Nauka, Moscou, 1958; trad. fr.: Ed. Mir, Moscou, 1974; trad. angl.: Elements of the theory of functions and functional analysis. Greylock Press, Rochester, N.Y. 1961.
KOSTOV V. P.
[174] Versal deformations of differential forms of degree α on a line. FAP 18 : 4 (1984), 81-82.
KUCHARZ V.
[175] Jets suffisants et fonctions de détermination finie. C.r. Acad. sci. Paris 284 (1975), 431-442.
KULIKOV V. S.
[176] Degenerate elliptic curves and resolution of uni- and bimodal singularities. FAP 9 : 1 (1975), 72-73, FAA 9, 69-70.
KULIKOV V. S.
[177] Counting of the singularities of embedding of generic algebraic surface in the projective space P^3. FAP 17 : 3 (1983), 15-27.

KUSHNIRENKO A. G.
[178] The Newton polyhedron and Milnor numbers. FAP 9 : 1 (1975), 74-75, FAA 9, 71-72.
KUSHNIRENKO (= KOUCHNIRENKO) A. G.
[179] Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. Invent. Math. 32 (1976), 1-31.
KUSHNIRENKO A. G.
[180] On the multiplicity of the solution of a system of holomorphic equations. Optimal Control (Mathematical questions of industrial control, No. 7), 62-65. Publ. Moscow State Univ., Moscow 1977.
LAMOTKE K.
[181] Die Homologie isolierter Singularitäten. Math. Zeit. 143 (1975), 27-44.
LANDIS E. E.
[182] Tangential singularities. FAP 15 : 2 (1981), 36-49, FAA 15, 103-114.
LANDO S. K.
[183] Normal forms of degrees of volume forms. FAP 19 : 2 (1985), 78-79.
LAZZERI F.
[184] Some remarks on the Picard-Lefschetz monodromy. « Quelques journées singulières. » Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1974.
LÊ DŨNG TRÁNG
[185] Sur les nœuds algébriques. Comp. Math. 25 : 3 (1972), 281-321.
LÊ DŨNG TRÁNG, RAMANUJAM C. P.
[186] The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type. Amer. J. Math. 98 (1976), 67-78.
LEES J. A.
[187] On the classification of Lagrange immersions. Duke Math. J. 43 (1976), 217-224.
LEES J. A.
[188] Defining Lagrangean immersions by phase functions. Preprint, 1977.
LERAY J.
[189] Differential and integral calculus on a complex analytic manifold.
LEVANTOVSKIĬ L. V.
[190] Singularities of stability domain boundary. FAP 16 : 1 (1982), 44-48.
LEVINE J.
[191] Polynomial invariants of knots in codimension two. Ann. Math. 84 (1966), 537-554.
LOOIJENGA E.
[192] The complement of the bifurcation variety of a simple singularity. Invent. Math. 23 (1974), 105-116.
LOOIJENGA E.
[193] The discriminant of a real simple singularity. Comp. Math. 37 (1978), 51-62.
LYASHKO O. V.
[194] Decompositions of simple singularities of functions. FAP 10 : 2 (1976), 49-56, FAA 10, 122-127.
LYASHKO O. V.
[195] The geometry of bifurcation diagrams. UMN 34 : 4 (1979), 205-206.
LYASHKO O. V.
[196] Classification of critical points on manifolds with singular boundary. FAP 17 : 3 (1983), 28-36.
LYASHKO O. V.
[197] La géométrie des diagrammes de bifurcation. INT. Problèmes actuels des mathématiques 22 (1983), VINITI, Moscou, 94-129. Trad. angl.: J. Sov. Math. 27 (1984).

LYCHAGIN V. V.
[198] On sufficient orbits of the group of contact diffeomorphisms. Math. Sbornik 104 (1977), 248-270, Math. of the USSR, Sbornik 33, 233-242.
MALGRANGE B.
[199] Le théorème de préparation en géométrie différentiable. Sém. H. Cartan, 15e année: 1962/63, Exposés 11, 12, 13, 22.
MALGRANGE B.
[200] Ideals of differentiable functions. Oxford U.P., 1966.
MALGRANGE B.
[201] Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée. Lecture Notes in Math. 459, 98-119, Springer, Berlin, 1974.
MALGRANGE B.
[202] Intégrales asymptotiques et monodromie. Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure (4) 7 (1974), 405-430.
MARTINET J.
[203] Déploiements versels des applications différentiables et classification des applications stables. Lecture Notes in Math. 535, 1-44, Springer, Berlin, 1976.
MASLOV V. P.
[204] Méthodes opératorielles. Nauka, Moscou, 1973; trad. fr. Ed. Mir, 1986.
MATHER J.
[205] Stability of C^{∞} mappings. I-VI. Ann. Math. 87 (1968), 89-104, 89 (1969), 254-291, Publ. Sci. IHES 35 (1969), 127-156, 37 (1970), 223-248, Advan. in Math. 4 (1970), 301-335, Lecture Notes in Math. 192 (1971), 207-253.
MATHER J.
[206] On Thom-Boardman singularities. Dynamical Systems (Ed. Peixoto), Academic Press, N.Y. (1973), 232-248.
MATHER J.
[207] Stratifications and mappings. Dynamical Systems (Ed. Peixoto), Academic Press, N.Y. (1973), 195-232.
MATHER J.
[208] How to stratify map germes. Lecture Notes in Math. 535, 128-176, Springer, Berlin, 1976.
MATHER J.
[209] Infinite-dimensional group actions. Astérisque, 32-33, 165-172.
MATOV V. I.
[210] Unimodal function's germs on a manifold with boundary. FAP 14 : 1 (1980), 69-70.
MATOV V. I.
[211] Singularités des fonctions du maximum sur une variété à bord. Travaux du Séminaire I. Petrovski 6 (1981), 195-222.
MATOV V. I.
[212] Germes de fonctions unimodaux et bimodaux sur la variété à bord. Travaux du Séminaire I. Petrovski 7 (1981), 174-189.
MATOV V. I.
[213] Topological classification of the maxima and minima function's germs of generic function families. UMN 37 : 4 (1982), 129-130; RMS (1982).
MATOV V. I.
[214] Ellipticity domains of generic families of homogeneous polinomials and extremum functions. FAP 19 : 2 (1985), 26-36.
McCRORY C.
[215] Generic curves and surfaces in 3-space: contact with lines and planes. Univ. Warwick. Preprint, 1980.
McCRORY C.
[216] Profiles of surfaces. Univ. Warwick. Preprint, 1980.

McCRORY C., SHIFRIN T.
[217] Cusps of the projective Gauss map. J. diff. geometry 19 : 1 (1984), 257-276.
MILNOR J.
[218] Morse Theory. Princeton U.P., 1963.
MILNOR J., ORLIK P.
[219] Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials. Topology 9 (1970), 385-393.
MILNOR J.
[220] Singular points of complex hypersurfaces. Princeton U.P., 1968.
MOND D.
[221] On the classification of germs of maps from R^2 to R^3. Proc. Lond. Math. Soc., 50 : 2 (1985), 333-369.
MORIN B.
[222] Formes canoniques des singularités d'une application différentiable. Comptes Rendus 260 (1965), 5662-5665, 6503-6506.
MORIN B.
[223] Calcul Jacobien. Ann. Ecole norm. Sup. 8 (1975), 1-98.
NEKHOROSHEV N. N.
[224] Exponentional estimate of stability time of Hamiltonian systems near to the integrables ones. UMN 32 : 6 (1977), 5-66; RMS (1977).
NEKHOROCHEV N. N.
[225] Minorations stables pour les applications différentiables et les gradients de fonctions différentiables. Math. sbornik 90 : 3 (1973), 432-472.
NEWTON I.
[226] Mathematical Papers (in 8 volumes) ed. D. T. Whiteside, Cambridge U.P., 1967-1981. (The 2nd letter to Oldenburg.)
NILSSON N.
[227] Some growth and ramification properties of certain integrals. Arkiv. Math. 5 (1963), 527-540.
NYE J. F., HITTANNAY J. H.
[228] The orientation and distorsion of caustics in geometrical optics. Optica Acta 31 : 1 (1984), 115-130.
ORLIK P., WAGREICH P.
[229] Isolated singularities of algebraic surfaces with a C^* action. Ann. Math. 93 (1971), 205-228.
PALAMODOV V. P.
[230] On the multiplicity of a holomorphic mapping. FAP 1 : 3 (1967), 54-65, FAA 1, 180-190.
PALIS J., TAKENS F.
[231] Stability of parametrised families of gradient vector filds. Annals of Math. 118 (1983), 383-421.
PETROVSKIĬ I. G., OLEĬNIK O. A.
[232] Topological properties of algebraic surfaces. Izv. Acad. Sci. SSSR 13 (1949), 389-402.
PHAM F.
[233] Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 333-367.
PHAM F.
[234] Remarque sur l'équisingularité universelle. Faculté des Sciences, Univ. Nice, 1970, 1-24.
PHAM F.
[235] Caustiques, phase stationnaire et microfonctions. Acta Scientarum Vietnamicarum 2 : 2 (1977).
PHAM F.
[236] Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin. Birkhäuser, Boston, 1979; Stuttgart, 1981.

PINKHAM H.
[237] Singularités exceptionnelles, la dualité étrange d'Arnold et les surfaces *K*-3. C.r. Acad sci. Paris 284 (1977), 615-618.
PLATONOVA O. A.
[238] The shadow and terminator of a surface in general position. FAP 13 : 1 (1979), 77-78.
PLATONOVA O. A.
[239] Singularities of the mutual disposition of a surface and a line. UMN 36 : 1 (1981), 221-222.
PLATONOVA O. A.
[240] Singularities in the problem of the quickest way round an obstacle. FAP 15 : 2 (1981), 86-87, FAA 15, 147-148.
PLATONOVA O. A.
[241] Singularities of projections of smooth surfaces. UMN 39 : 2 (1984), 149-150.
PLATONOVA O. A.
[242] Projection des surfaces lisses. Travaux du Séminaire I. Petrovski 10 (1984), 135-149.
POENARU V.
[243] Versal unfoldings of *G*-invariant functions. Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 86-88.
POENARU V.
[244] Singularités C^∞ en présence de symétrie. Lecture Notes in Math. 510 (1976).
POINCARÉ H.
[245] Œuvres Complètes. Dunod, Paris, 1961. Sur les formes cubiques. I. Œuvres, t. V, 28-72.
POINCARÉ H.
[246] Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. Thèse, Paris, Gautier-Villars, 1879, 93.
POSTON T., STEWART I.
[247] Catastrophe Theory and its applications. Pitman, 1978.
ROBERTSON S. A., ROMERO-FUSTER M. C.
[248] The convex hull of a hypersurface. Proc. Lond. Math. Soc. 50 : 2 (1985), 370-384.
SAITO K.
[249] Einfach elliptische Singularitäten. Invent. Math. 23 (1974), 289-325.
SAITO K.
[250] Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen. Invent. Math. 14 (1971), 123-142.
SAMOÏLENKO A. M.
[251] On the equivalence of a smooth function with its Taylor polynomial in the neighbourhood of a critical point of finite type. FAP 2 : 4 (1968), 63-69, FAA 2 : 4, 62-66.
SCHERK J.
[252] On the Gauss-Manin connection of an isolated hypersurface singularity. Math. Ann. 238 (1978), 23-32.
SCHERK J.
[253] On the monodromy theorem for isolated hypersurface singularities. Invent. Math. 58 (1980), 289-301.
SEBASTIANI M., THOM R.
[254] Un résultat sur la monodromie. Invent. Math. 13 (1971), 90-96.
SEDYKH V. D.
[255] Singularities of the convex envelope of a curve in R^3. FAP 11 : 1 (1977), 81-82, FAA 11, 72-73.
SEDYKH V. D.
[256] The construction of the convex envelope of a space curve. Proc. Sem. I. G. Petrovskii 6 (1981), 239-256, UMN 36 : 5 (1981), 191-192.

SEDYKH V. D.
[257] Modules fonctionnels des singularités d'enveloppes convexes de variétés de codimension 1 et 2. Math. sb. 119 : 2 (1982), 233-247.
SEDYKH V. D.
[258] Singularités d'enveloppes convexes. Sib. Math. J. 24 : 3 (1983), 158-175.
SHAFAREVICH I. R.
[259] Basic algebraic geometry. Springer, 1974.
SHERBAK I. G.
[260] Focal set of a surface with boundary and caustics of the groups B_k, C_k, F_4 generated by reflexions. FAP 18 : 1 (1984), 94-95.
SHERBAK I. G.
[261] Duality of boundary singularities. UMN 39 : 2 (1984), 220-221; RMS (1984).
SHERBAK O. P.
[262] Courbes gauches duales projectives et singularités de Legendre. Travaux de l'Univ. de Tbilissi, 232-233: 13-14 (1982), 280-336.
SHERBAK O. P.
[263] Singularities of evolvents family in a neighborhood of an intlexion point and group H_3 generated by reflexions. FAP 17 : 4 (1983), 70-72.
SHERBAK O. P.
[264] H_4 in a problem on contournement of an obstacle. UMN 39 : 4 (1984), 114; RMS (1984).
SIERSMA D.
[265] Periodicities in Arnod's list of singularities. Proc. Nordic Summer School on Real and Complex Singularities, Oslo, 1976, Sijthoff and Noordhoff, 1977, 679-686.
SINGULARITIES
[266] Proc. of Symp. in Pure Math. 40, parts 1, 2 (1983).
STEENBRINK J. H. M.
[267] Limits of Hodge Structures. Invent. Math. 31 : 3 (1975), 229-257.
STEENBRINK J. H. M.
[268] The intersection form for quasihomogeneous singularities. Compositio Math. 34 : 2 (1977), 211-223.
STEENBRINK J. H. M.
[269] Mixed Hodge structures on the vanishing cohomology. Proc. Nordic Summer School on Real and Complex Singularities, Oslo, 1976, Sijthoff and Noordhoff, 1977.
STEENBRINK J. H. M.
[270] Semicontinuity of the singularity spectrum. Inventiones Mathematicae 79 : 3 (1985), 557-566.
TADINI M.
[271] Germe Finitamente Determinades et Simbolo de Boardman. Brasil, 1977.
TEISSIER B.
[272] Déformations à type topologique constant. I, II. *In* : Sém. Douady-Verdier, Paris, 1972.
THOM R., LEVINE H.
[273] Singularities of differentiables mappings. I. Bonn, 1959, reprinted in Lecture Notes in Math. 192 (1971).
THOM R.
[274] Les singularités des applications différentiables. Ann. Inst. Fourier 6 (1956), 43-87.
THOM R.
[275] Topological models in biology. Topology 8 (1969), 313-335.
TIMOURIAN I. G.
[276] The invariance of Milnor's number implies topological triviality. Amer. J. Math. 99 : 2 (1977), 437-446.

TOUGERON J. C.
[277] Idéaux de fonctions différentiables. Ann. Inst. Fourier 18 : 1 (1968), 177-240.
TROTMAN D.
[278] A transversal property weaker than Whitney A-regularity. Bull. Lond. Math. Soc. 8 (1976), 225-228.
TROTMAN D.
[279] Counterexamples in stratification theory: two discordant horns. Proc. Nordic Summer School in Real and Complex Singularities, Oslo, 1976, Sijthoff and Noordhoff, 1977, 679-686.
TYURINA G. N.
[280] On the topological properties of isolated singularities of complex spaces of codimension one. Izv. Acad. Sci. USSR 32 (1968), 605-620.
TYURINA G. N.
[281] Locally semiuniversal planar deformations of isolated singularities of complex spaces. Izv. Acad. Sci. SSSR 33 (1969), 1026-1058.
TYURINA G. N.
[282] Resolution of singularities of plane deformations of rational double points. FAP 4 : 1 (1970), 77-83, FAA 4 : 1, 68-73.
VARCHENKO A. N.
[283] Newton polyhedra and estimations of oscillatory integrals. FAP 10 : 3 (1976), 13-38, FAA 10, 175-196.
VARCHENKO A. N.
[284] Local topological properties of smooth mappings. Izv. Acad. Sci. USSR 38 (1974), 1037-1090.
VARCHENKO A. N.
[285] Versal topological deformations. Izv. Acad. Sci. USSR 39 (1975), 294-314.
VARCHENKO A. N.
[286] A zeta-function for monodromy and Newton diagrams. Invent. Math. 37 (1976), 253-262.
VARCHENKO A. N.
[287] Theorems on the topological equisingularity of families of algebraic manifolds and polynomial mappings. Izv. Acad. Sci. SSSR 36 (1972), 957-1019.
VARCHENKO A. N.
[288] The integrality of the limit of the curvature integral over the boundary of an isolated singularity of a surface in C^3. UMN 33 : 6 (1978), 199-200.
VARCHENKO A. N.
[289] A formula for the ranks of the homology groups of the boundary of an isolated singularity of a surface in C^3 and the Newton diagram. FAP 13 : 1 (1979), 64-65, FAA 13, 52-53.
VARCHENKO A. N.
[290] Contact structures and isolated singularities. Vestnik MGU, ser. math. 2 (1980), 18-21.
VARCHENKO A. N.
[291] The Gauss-Manin connection and the Bernstein polynomial. UMN 35 : 4 (1980), 153-154.
VARCHENKO A. N.
[292] Hodge properties of Gauss-Manin connections. FAP 14 : 1 (1980), 44-45, FAA 14, 34-35.
VARCHENKO A. N.
[293] The asymptotics of holomorphic forms determine a mixed Hodge structure. Dokl. Akad. Nauk SSSR 255 (1980), 1035-1038.
VARCHENKO A. N.
[294] The asymptotics of the integrals of the saddle point method. UMN 36 : 4 (1981), 212-213.

VARCHENKO A. N.
[295] On obstructions to the local equivalence of distributions. Math. Zametki 29 : 6 (1981), 939-947. Math. Notes 29 : 6, 121-128.
VARCHENKO A. N.
[296] An asymptotic mixed Hodge structure in vanishing cohomologies. Izv. Acad. Sci. SSSR, ser. math. 45 (1981), 540-591.
VARCHENKO A. N.
[297] Algebro-geometrical equisingularity and local topological classification of smooth mappings. Proc. Int. Cong. Math. Vancouver 1 (1975), 427-431.
VARCHENKO A. N.
[298] The Gauss-Manin connection of isolated singular point and Bernstein polynomial. Bull. Sci. Math., 2e sér., 104 (1980), 205-223.
VARCHENKO A. N.
[299] The monodromy operator in vanishing cohomologies and the operator of multiplication by f in the local ring. Dokl. Akad. Nauk SSSR 260 (1981), 272-276.
VARCHENKO A. N.
[300] The complex index of a singularity does not change along the strata μ = const. FAP 16 : 1 (1981), 1-12, FAA 16, 1-9.
VARCHENKO A. N.
[301] Minoration de la codimension de la strate μ = Cte à l'aide d'une structure mixte de Hodge. Vestnik MGU, sér. math. mécan. 6 (1982), 28-31.
VARCHENKO A. N.
[302] Sur la semi-continuité du spectre et la majoration du nombre des points singuliers de l'hypersurface projective. DAN SSSR 270 : 6 (1983), 1294-1297; Sov. Math. Doklady (1983).
VARCHENKO A. N.
[303] Spectre et décompositions de points critiques de fonctions. DAN SSSR 270 : 2 (1983), 267-270; Sov. Math. Doklady (1983).
VARCHENKO A. N.
[304] Comportement asymptotique des intégrales et structure de Hodge. INT. Problèmes actuels des mathématiques 22 (1983), 130-166; J. Sov. Math. 27 (1984).
VARCHENKO A. N.
[305] On local classification of volume forms in presence of a hypersurface. FAP 19 : 3 (1985), 9-18.
VARCHENKO A. N.
[306] Sur le résidu local et la forme d'intersection en cohomologie évanescente. Izv. Acad. Nauk SSSR, sér. math., 49 : 1 (1985), 32-54.
VARCHENKO A. N., CHMUTOV S. V.
[307] The finite irreducible groups generated by reflexions are monodromy groups of convenient singularities. FAP 18 : 3 (1984), 1-14.
VARCHENKO A. N., MOLCHANOV A. S.
[308] Applying the method of stationary phase to limit theorems for Markov chains. Dokl. Akad. Nauk SSSR 233 (1977), 11-14. Soviet Math. Doklady 18, 10-13.
VASILIEV V. A.
[309] Asymptotics of exponential integrals, Newton's diagram and the classification of minimal points. FAP 11 : 3 (1977), 1-11, FAA 11, 163-172.
VASILIEV V. A.
[310] Affineness of normal form of strata μ = const. of germs of smooth functions. FAP 12 : 3 (1978), 72-73, FAA 12, 218-219.
VASILIEV V. A.
[311] Asymptotics of exponential integrals in the complex domain. FAP 13 : 4 (1979), 1-12, FAA 13, 239-247.

VASILIEV V. A.
[312] Characteristic classes of Lagrangian and Legendrian manifolds dual to singularities of caustics and wave fronts. FAP 15 : 3 (1981), 10-22, FAA 15, 164-179.
VASILIEV V. A.
[313] Self-intersections of wave fronts and characteristic numbers of Legendre (Lagrange). FAP 16 : 2 (1982), 68-69.
VEGTER G.
[314] Bifurcations of gradient vector fields. Asterisque 98-99 (1982), 39-73.
VINOGRADOV I. M.
[315] Méthode des sommes trigonométriques. Nauka, Moscou, 1971.
VORONIN S. M.
[316] The analytic classification of germs of conformal mappings (C, 0) → → (C, 0) with linear part the identity. FAP 15 : 1 (1981), 1-17, FAA 15, 1-13.
VORONIN S. M.
[317] Analytical classification of involution pairs and its applications. FAP 16 : 2 (1982), 21-29.
WAJNRYB B.
[318] The monodromy group of plane curve singularities. Math. Ann. 246 : 2 (1980), 141-154.
WALL C. T. C.
[319] Regular stratifications. Lecture Notes in Math. 468, 332-334, Springer, 1975.
WALL C. T. C.
[320] Are maps finitely determined in general? Bull. Lond. Math. Soc. 11 (1979), 151-154.
WALL C. T. C.
[321] A note on symmetry of singularities. Bull. Lond. Math. Soc. 12 (1980), 169-175.
WALL C. T. C.
[322] The first canonical stratum. Jour. Lond. Math. Soc. 21 (1980), 419-433.
WALL C. T. C.
[323] Determination of the semi-nice dimensions. Math. Proc. Cambridge Phylos. Soc. 97 : 1 (1985), 79-88.
WASSERMANN G.
[324] Stability of unfoldings. Lecture Notes in Math. 393 (1974).
WASSERMANN G.
[325] (r, s)-stability of unfoldings. Preprint, Univ. of Regensburg, 1976.
WASSERMANN G.
[326] Stability of unfoldings in space and time. Acta Math. 135 (1975), 57-128.
WASSERMANN G.
[327] Classification of singularities with compact Abelian symmetry. Regensburger Math. Schriften. 1 (1977), Univ. Regensburg.
WEINSTEIN A.
[328] Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. Advances in Math. 6 (1971), 329-346.
WEINSTEIN A.
[329] Lagrangian submanifolds and Hamiltonian systems. Ann. Math. 98 (1973), 377-410.
WEINSTEIN A.
[330] Lectures on symplectic manifolds. CBMS Regional Conf. Univ. of N. Carolina, 1976.
WEINSTEIN A.
[331] Singularities of families of functions. Diff. Geometrie im Grossen, Obervolfach, 4 (1971).

WELLS G.
[332] Extension theorems for smooth functions on real analytic spaces and quotiening by Lie groups and smooth stability. J. Aust. Math. Soc. 24 (1977), « A », 440-457.
WELLS R. O.
[333] Differential analysis on complex manifolds. 2nd ed., Springer, 1980.
WHITNEY H.
[334] On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Ann. Math. 62 (1955), 374-410.
WHITNEY H.
[335] Local properties of analytic varieties. Differential and Combinatorial Topology. Princeton U.P., 1965.
WHITNEY H.
[336] The general type of singularity of a set of $2n-1$ smooth functions in n variables. Duke Math. Jour. 10 (1943), 161-172.
WHITNEY H.
[337] The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space and $(2n-1)$-space. Ann. Math. 45 (1944), 220-293.
WHITNEY H.
[338] On singularities of mappings of Euclidean spaces. Symposium Internacional de Topologia Algebraica, Mexico City, 1958.
ZAKALYUKIN V. M.
[339] Lagrangian and Legendrian singularities. FAP 10 : 1 (1976), 26-36, FAA 10, 23-31.
ZAKALYUKIN V. M.
[340] Bifurcations of wave-fronts, depending on one parameter. FAP 10 : 2 (1976), 69-70, FAA 10, 139-140.
ZAKALYUKIN V. M.
[341] Singularities of convex envelopes of smooth manifolds. FAP 11 : 3 (1977), 76-77, FAA 11, 225-226.
ZAKALYUKIN V. M.
[342] Chirurgies sur les fronts et les caustiques dépendant d'un paramètre, versalité d'applications. INT. Problèmes actuels des mathématiques 22 (1983), VINITI, Moscou, 56-93. Trad. angl.: J. Sov. Math. 27 (1984).
ZARISKI O.
[343] On the Poincare group of a projective hypersurface. Ann. Math. 38 (1973), 131-141.
ZEEMAN E. C.
[344] Bibliography on catastrophe theory. Mathematical Institute, Warwick Univ., 1981.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse: Editions Mir,
2, Pervy Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique